TUTORAT SANTE STRASBOURG

CAHIER DE REMISE A NIVEAU EN MATHEMATIQUES, NIVEAU TERMINALE SCIENTIFIQUE

Faculté de médecine
Université de Strasbourg

SOMMAIRE

UE5 LSPS/UE4 PACES :

PREAMBULE

Dans ce cahier de remise à niveau tu trouveras des vidéos de cours extraites du site « Khan Academy ». Le but est de voir ou revoir des notions abordées dans certaines filières au lycée afin d'aborder plus sereinement les cours qui seront exposés à la faculté.

Tu pourras également t'exercer sur les différents points de cours abordés grâce à des exercices corrigés.

N'oublie pas que si tu ne comprends pas directement certaines notions c'est normal et c'est en s'entrainant que tout deviendra plus clair.

Bon courage !

DERIVATION, NIVEAU PREMIERE

Avant de commencer

Les différentes notations de la dérivée d'une fonction

Notation de Lagrange : f'

Notation de Leibniz : $\frac{df}{dx}$

Notation de Lagrange

La notation f' (qui se lit « f prime ») pour désigner la dérivée de la fonction f est due au mathématicien français Lagrange (1736 - 1813).

Cette notation est la plus usuelle et la plus simple si la fonction étudiée est une fonction d'une seule variable.

Si $y = f(x)$ on peut désigner la dérivée de f par y'. Et si par exemple, $f(x) = 3x^2 + 4x - 5$, on peut écrire que $f'(x) = (3x^2 + 4x - 5)'$

Notation de Leibniz

La notation $\frac{df(x)}{dx}$ pour désigner la dérivée de la fonction f est due au philosophe et mathématicien allemand Leibniz (1646 - 1716). Si $y = f(x)$, Le symbole donne la précision qu'il s'agit de la dérivée par rapport à x. On peut l'appliquer à l'expression de la fonction. Par exemple, si f est la fonction qui à tout x réel fait correspondre son carré x^2, la dérivée de f peut s'écrire $\frac{d(x^2)}{dx}$. C'est la notation qu'il faut obligatoirement utiliser si la fonction étudiée est une fonction de plusieurs variables.

Adapté du site Khan Academy

Fonctions dérivées de C, de $u + v$, de $u - v$ et de λu

I. Dérivée d'une fonction constante

Lien de la vidéo : https://youtu.be/wsGOjHIyT1A

Exercice 1

Donner les dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{2}{3}$
b) $g(x) = 2\pi$
c) $h(x) = 1000$

II. Dérivée de la fonction kf et de la fonction $f + g$

A savoir avant de visionner la vidéo : La dérivée de x est 1, $x' = 1$.

Lien de la vidéo : https://youtu.be/-8igeiRks0A

Exercice 2

1) Donner les dérivées des fonctions suivantes :
   a. $F(x) = 2 \times f(x)$
   b. $G(y) = 3 \times \left(h(y) + g(y)\right)$
2) On donne $f(x) = 5$. Calculer $F'(x)$.

III. Calculer la dérivée d'une fonction affine

Lien de la vidéo : https://youtu.be/PZps3a3cpL4

Exercice 3

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 3x + 2$
b) $g(x) = 6 - 4x$
c) $h(x) = 10x - 17$

A retenir :

Fonction	Dérivée
$\boldsymbol{u + v}$	$u' + v'$
$\boldsymbol{u - v}$	$u' - v'$
$\boldsymbol{k\ (constante)}$	0
$\boldsymbol{\lambda(constante) \times u}$	$\lambda \times u'$
$\boldsymbol{x}$	1

IV. Utiliser les propriétés des dérivées

Lien de la vidéo : https://youtu.be/lnZ8dbUmcr0

Exercice 4

Soit $f(x) = 2x + 3,\ g(x) = 7$ et $h(x) = -5f(x) + 9g(x)$

1) Exprimer $h'(x)$ en fonction de x
2) Calculer le nombre dérivé de h aux points d'abscisse 2 et 21.

Fonction dérivée d'une fonction puissance

I. Dérivée d'une fonction puissance

Lien de la vidéo : https://youtu.be/j0iXM6DHKKo

A retenir :

Fonction	Dérivée
$\boldsymbol{x^n,\ \ n \neq 0}$	$n \times x^{n-1}$

Exercice 5

Donner les dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x) = x^3$
2) $g(x) = x^{\frac{1}{2}}$
3) $h(y) = y^{-2{,}008}$

II. Propriétés des dérivées et dérivée d'une fonction polynôme

Lien de la vidéo : https://youtu.be/k6Oe3gzMsi4

Exercice 6

Dériver la fonction suivante : $f(x) = 3x^6 - 2x^4 + x^2 - 54$

Fonctions dérivées du produit et du quotient de deux fonctions

I. Dérivée du produit de deux fonctions

Lien de la vidéo : https://youtu.be/nWSlhOrR3aY

Exercice 7

Calculer la dérivée de la fonction suivante : $f(x) = (0{,}5x^2 - 5)\left(\frac{2}{3}x^3 + 2x + 8\right)$

II. Dérivée du quotient de deux fonctions

Lien de la vidéo : https://youtu.be/merDii3GaJc

Exercice 8

Calculer la dérivée de la fonction suivante : $f(x) = \frac{-2x^2+9}{4x-6}$

A retenir :

Fonction	Dérivée
$\boldsymbol{u \times v}$	$u' \times v + u \times v'$
$\boldsymbol{\frac{u}{v}}$	$\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$

CORRECTION - DERIVATION NIVEAU PREMIERE

Correction des exercices

Fonctions dérivées de C, de $u + v$, de $u - v$ et de λu

I. Dérivée d'une fonction constante

Exercice 1

Toutes les fonctions sont constantes : leurs dérivées sont donc nulles

a) $f'(x) = 0$
b) $g'(x) = 0$
c) $h'(x) = 0$

II. Dérivée de la fonction kf et de la fonction $f + g$

Exercice 2

1) a. $F'(x) = [2 \times f(x)]' = 2 \times f'(x)$

b. $G'(y) = \left[3 \times \left(h(y) + g(y)\right)\right]'$
$= 3 \times \left(h(y) + g(y)\right)'$
$= 3 \times \left(h'(y) + g'(y)\right)$
$= 3h'(y) + 3g'(y)$

2) $f'(x) = 0$ donc $F'(x) = 2 \times f'(x) = 2 \times 0 = 0$

III. Calculer la dérivée d'une fonction affine

Exercice 3

a. $f'(x) = (3x + 2)'$
$= (3x)' + 2'$
$= 3 \times (x') + 0$
$= 3 \times 1 + 0$
$= 3$

b. $g'(x) = (6 - 4x)'$
$= 6' + (-4x)'$
$= 0 - (4x)'$
$= -4 \times (x')$
$= -4 \times 1$
$= -4$

c. $h'(x) = (10x - 17)'$
$= (10x)' - 17'$
$= 10 \times (x') - 0$
$= 10 \times 1$
$= 10$

IV. Utiliser les propriétés des dérivées

Exercice 4

1) $h'(x) = [-5f(x) + 9g(x)]'$
$= [-5fx)]' + [9g(x)]'$
$= -5 \times f'(x) + 9 \times g'(x)$

Calculons d'abord $f'(x)$:

$f'(x) = (2x + 3)'$

$= (2x)' + 3'$
$= 2 \times (x') + 0$
$= 2 \times 1 + 0$
$= 2$

Puis calculons $g'(x)$:
$g'(x) = 7' = 0$
On a donc $h'(x) = -5 \times f'(x) + 9 \times g'(x) = -5 \times 2 + 0 = -10$

2) Le nombre dérivé de h aux points d'abscisse 2 et 21 vaut donc : $h'(2) = -10$ et $h'(21) = -10$

Fonction dérivée d'une fonction puissance

I. Dérivée d'une fonction puissance

Exercice 5

4) $f'(x) = (x^3)'$
$= 3 \times x^{3-1}$
$= 3 \times x^2$

5) $g'(x) = (x^{\frac{1}{2}})'$
$= \frac{1}{2} \times x^{\frac{1}{2}-1}$
$= \frac{1}{2} \times x^{-\frac{1}{2}}$
$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Rappel : $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ et $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

6) $h'(y) = (y^{-2{,}008})'$
$= -2{,}008 \times y^{-2{,}008-1}$
$= -2{,}008 \times y^{-3{,}008}$

II. Propriétés des dérivées et dérivée d'une fonction polynôme

Exercice 6

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3x^6 - 2x^4 + x^2 - 54)' \\ &= (3x^6)' - (2x^4)' + (x^2)' - 54' \\ &= 3 \times (x^6)' - 2 \times (x^4)' + (x^2)' - 54' \\ &= 3 \times (6 \times x^{6-1}) - 2 \times (4 \times x^{4-1}) + 2 \times x^{2-1} - 0 \\ &= 3 \times (6 \times x^5) - 2 \times (4 \times x^3) + 2 \times x - 0 \\ &= 18x^5 - 8x^3 + 2x \end{aligned}$$

Fonctions dérivées du produit et du quotient de deux fonctions

I. Dérivée du produit de deux fonctions

Exercice 7

$$f'^{(x)} = [(0{,}5x^2 - 5)\left(\frac{2}{3}x^3 + 2x + 8\right)]'$$

On définit les fonctions suivantes :

$u(x) = 0{,}5x^2 - 5$ et $v(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x + 8$

$$u'(x) = 0{,}5 \times 2 \times x = x$$

$$v'(x) = \frac{2}{3} \times 3 \times x^2 + 2 = 2x^2 + 2$$

Ainsi on a : $f'(x) = \boldsymbol{u'} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v'}$

$$\begin{aligned} &= \boldsymbol{x} \times \left(\boldsymbol{\frac{2}{3}x^3 + 2x + 8}\right) + (\boldsymbol{0,5x^2 - 5})(\boldsymbol{2x^2 + 2}) \\ &= \frac{2}{3}x^4 + 2x^2 + 8x + x^4 + x^2 - 10x^2 - 10 \\ &= \frac{5}{3}x^4 - 7x^2 + 8x - 10 \end{aligned}$$

II. Dérivée du quotient de deux fonctions

Exercice 8

$$f'(x) = \left(\frac{-2x^2 + 9}{4x - 6}\right)'$$

On définit les fonctions suivantes :

$u(x) = -2x^2 + 9$ et $v(x) = 4x - 6$

$$u'(x) = -2 \times 2x = -4x$$

$$v'(x) = 4$$

Ainsi on a : $f'(x) = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$

$$= \frac{-4x \times (4x - 6) - (-2x^2 + 9) \times 4}{(4x - 6)^2}$$

$$\frac{-16x^2 + 24x - (-8x^2 + 36)}{(4x - 6)^2}$$

$$= \frac{-16x^2 + 24x + 8x^2 - 36}{(4x - 6)^2}$$

$$= \frac{-8x^2 + 24x - 36}{(4x - 6)^2}$$

FONCTION EXPONENTIELLE ET LOGARITHME

Fonction exponentielle

I. Qu'est-ce qu'une fonction exponentielle ?

Lien de la vidéo : https://youtu.be/pBeGfLoId4I

Exercice 1

Une bronche principale se divise en 2 ramifications à chaque niveau.

Combien de ramifications possèdera-t-elle à l'étage 11 ?

II. Fonctions affines et fonctions exponentielles

Lien de la vidéo : https://youtu.be/cvUMBw5YJpc

Exercice 2

Pour chacune des fonctions suivantes, dire si elle est linéaire ou exponentielle :

a) Chaque année, la valeur du téléphone de Jean diminue de 50€.
b) Tous les 10 ans, la paie de Marie augmente de 5%.
c) La valeur de ce vase rare et ancien double tous les 10 ans.

Fonction Logarithme de base B

I. Les propriétés du logarithme

1. Partie 1

Lien de la vidéo : https://youtu.be/-Fq4f05NcnI

Exercice 3

Donner la définition d'un logarithme de base B de a ($log_B(a)$).

Exercice 4

Quelles sont les deux propositions exactes concernant les propriétés du logarithme ?

A. $log_B(3) + log_B(4) = log_B(12)$

B. $log_B(3) + log_B(4) = log_B(7)$

C. $log_B(4) - log_B(3) = log_B(1)$

D. $log_B(4) - log_B(3) = log_B(\frac{4}{3})$

E. Autre réponse

2. Partie 2

Lien de la vidéo : https://youtu.be/AZSK-VnEcL0

Exercice 5

Quelles sont les deux propositions exactes concernant les propriétés du logarithme ?

A. $4 \times log_B(3) = log_B(81)$

B. $4 \times log_B(3) = log_B(64)$

C. $log_3(4) = 1{,}262$ (arrondi à 0,001)

D. $log_3(4) = 0{,}794$ (arrondi à 0,001)

Exercice 6

Calculer <u>sans</u> calculatrice le logarithme suivant : $log_2((\frac{8}{\sqrt{32}} \times 2)^2)$

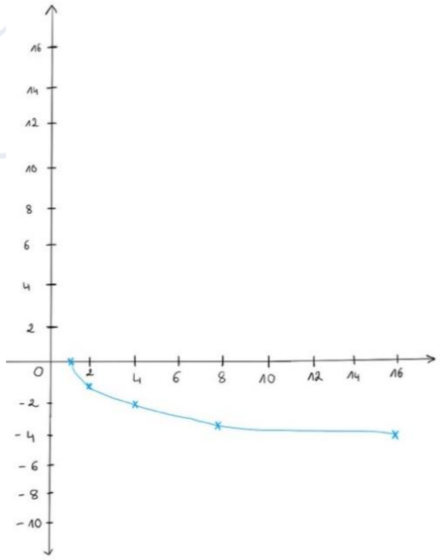
(À la fin, il faut obtenir un nombre entier)

II. Représentation graphique d'une fonction logarithme

Lien de la vidéo : https://youtu.be/NtmSQMrb_d0

Exercice 7

Quelle est l'équation de la fonction suivante ?



A. $y = log_2(x)$

B. $y = log_2(x-1)$

C. $y = log_2(-x)$

D. $y = -log_2(x)$

E. Autre réponse

Fonction logarithme népérien

I. Calculer un logarithme népérien à la calculatrice

Lien de la vidéo : https://youtu.be/1uZmUaDr-Zw

Exercice 8

Calculer, à l'aide de votre calculatrice, la valeur arrondie au 1000ème du logarithme népérien de 48.

II. Asymptote verticale de la fonction ln

Lien de la vidéo : https://youtu.be/s6CHLi4Po4c

Exercice 9

Soit la fonction définie par $y = ln(2x+3)$

a) Pour quelles valeurs de x la fonction est-elle définie ?
b) En déduire en quelle valeur de x la courbe représentative de la fonction possède une asymptote verticale.
c) Trouver la valeur de x pour laquelle la courbe représentative de la fonction traverse l'axe des abscisses.

III. Dérivée de $\boldsymbol{ln}(\boldsymbol{x})$ et de $\boldsymbol{ln}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))$

Lien du cours : https://fr.khanacademy.org/math/terminale-option-math-complementaires/xd9273d115c91e8d4:fonction-logarithme-neperien/xd9273d115c91e8d4:derivee-de-ln-x-et-de-ln-u-x/a/differentiating-logarithmic-functions-review

Exercice 10

Dériver les fonctions suivantes :

a) $\ln(6)$
b) $\ln(3x^4+5)$

Fonction exponentielle et logarithme

I. Fonction exponentielle et logarithme : leur courbe représentative

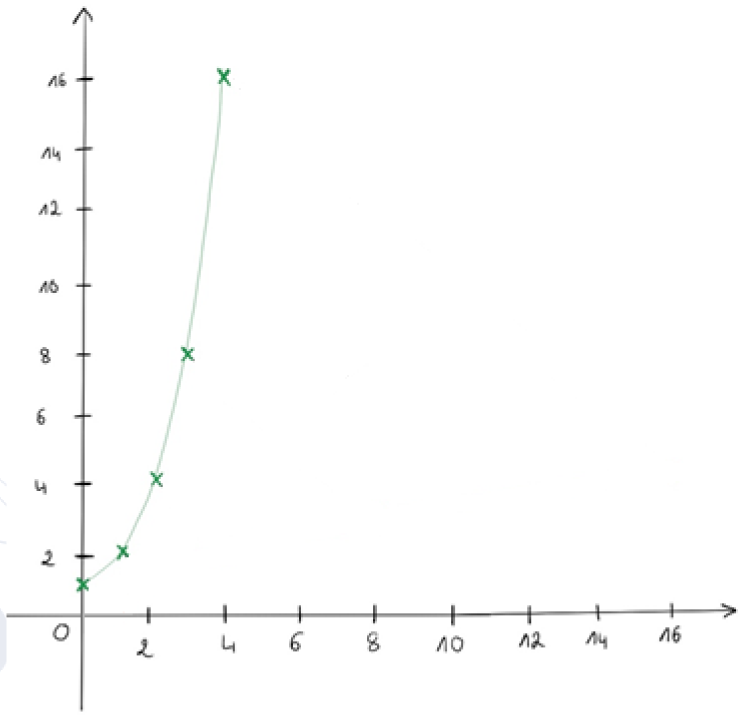
Lien des vidéos :

https://youtu.be/gxcBi_2BmZ8

https://youtu.be/xdSysyD7zvU

Exercice 11

Soit la fonction $y = b^x$ tracée ci-dessous :



$y = b^x$

x	y
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16

On donne : $log_b(x) = \frac{log_a(x)}{log_a(b)}$ donc $log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$

a) Trouver la valeur de b
b) Tracer la fonction $y = ln_b(x)$

II. Fonction exponentielle et logarithme : deux tableaux de valeurs

Lien de la vidéo : https://youtu.be/Gdjx_hUjV-Y

Exercice 12

Grâce aux deux tableaux ci-dessous uniquement (donc sans utiliser la calculatrice), déterminer la valeur de a, de b, de c et de d.

x	1,262	1,631	1,893	2,096
b^x	4	6	8	10

y	a	3	$4c$	$20d$
$log_b(y)$	0	1,0	1,893	2,096

CORRECTION - FONCTION EXPONENTIELLE ET LOGARITHME

Fonction exponentielle

I. Qu'est-ce qu'une fonction exponentielle ?

Exercice 1

À l'étage 11, la bronche aura formé 2^{11} soit 2048 ramifications.

II. Fonctions affines et fonctions exponentielles

Exercice 2

Pour chacune des fonctions suivantes, dire si elle est linéaire ou exponentielle :

1 : affine

2 : exponentielle

3 : exponentielle

Fonction logarithme de base B

I. Les propriétés du logarithme

Partie 1

Exercice 3

Le logarithme de base B de a correspond à la valeur à laquelle il faut élever B pour obtenir a.

Exercice 4

Réponse juste : B + D

A. FAUX (cf. B)

B. VRAI : Car $log_B(A) + log_B(B) = log_B(A \times B)$

C. FAUX (cf. D)

D. VRAI : Car $log_B(A) - log_B(B) = log_B(\frac{A}{B})$

Partie 2

Exercice 5

Réponse juste : A + C

A. VRAI : Car $A \times log_B(C) = log_B(C^A)$

Donc ici : $4 \times log_B(3) = log_B(3^4) = log_B(81)$

B. FAUX (cf. A)

C. VRAI : Car $log_B(A) = \frac{log_C(A)}{log_C(B)}$

Donc ici : $log_3(4) = \frac{ln(4)}{ln(3)} = 1{,}262$ (arrondi à 0,001)

Ou : $log_3(4) = \frac{log_{10}(4)}{log_{10}(3)} = 1{,}262$ (arrondi à 0,001)

Note : On utilise ici ln ou log_{10} car se sont les 2 logarithmes qui sont disponibles sur notre calculatrice.

D. FAUX (cf. C)

Exercice 6

$$log_2\left(\left(\frac{8}{\sqrt{32}} \times 2\right)^2\right) = 2log_2\left(\frac{8}{\sqrt{32}} \times 2\right) = 2\left(log_2\left(\frac{8}{\sqrt{32}}\right) + log_2(2)\right)$$

$$= 2\left(log_2(8) - log_2(\sqrt{32})\right) + 1) = 2log_2(8) - 2log_2(\sqrt{32}) + 2$$

$$= 2log_2(8) - 2log_2(32^{\frac{1}{2}}) + 2 = 2log_2(8) - 2 \times \frac{1}{2}log_2(32) + 2$$

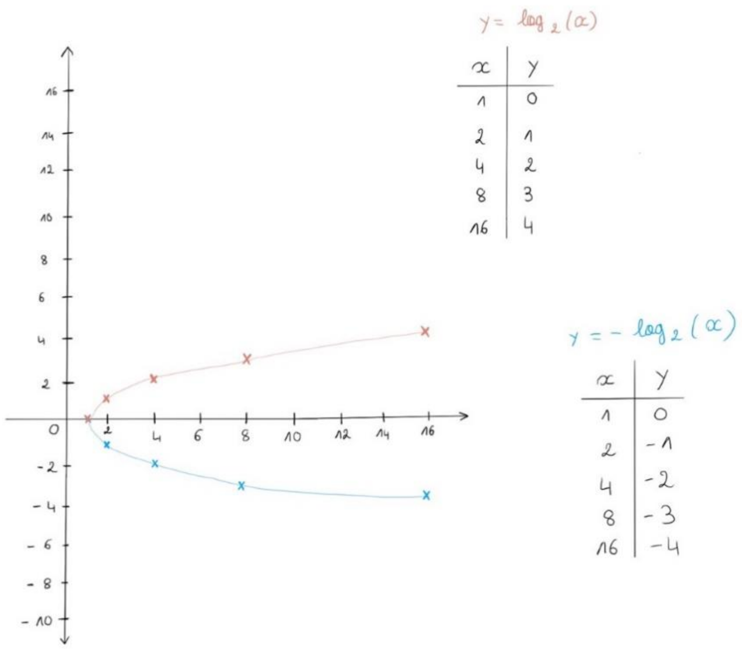
$$= 2 \times 3 - 5 + 2 = 6 - 5 + 2 = \mathbf{3}$$

II. Représentation graphique d'une fonction logarithme

Exercice 7

Réponse juste : D

Car la fonction tracée est symétrique à la fonction $y = log_2(x)$ par rapport à l'axe des abscisses.



Fonction Logarithme népérien

I. Calculer un logarithme népérien à la calculatrice

Exercice 8

$ln(48) = 3{,}871$

II. Asymptote verticale de la fonction ln

Exercice 9

a) La fonction est définie si $2x + 3 > 0 \Leftrightarrow 2x > -3 \Leftrightarrow x > -1{,}5$
b) La courbe représentative de la fonction possède une asymptote verticale en $x = 1{,}5$
c) La courbe représentative de la fonction traverse l'axe des abscisses lorsque $y = 0$. On résout donc l'équation : $y = ln(2x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow e^{\ln(2x+3)} = e^0$

$\Leftrightarrow 2x + 3 = 1$

$\Leftrightarrow 2x = -2$

$\Leftrightarrow x = -1$

La courbe représentative de la fonction traverse donc l'axe des abscisses en $x = -1$.

III. Dérivée de $\boldsymbol{ln(x)}$ et de $\boldsymbol{ln(u(x))}$

Exercice 10

c) $\ln'(6) = \frac{1}{6}$
d) $\ln(3x^4 + 5) = \frac{(3x^4+5)\prime}{3x^4+5} = \frac{4*3x^3}{3x^4+5} = \frac{12x^3}{3x^4+5} = \frac{12}{3x+5}$

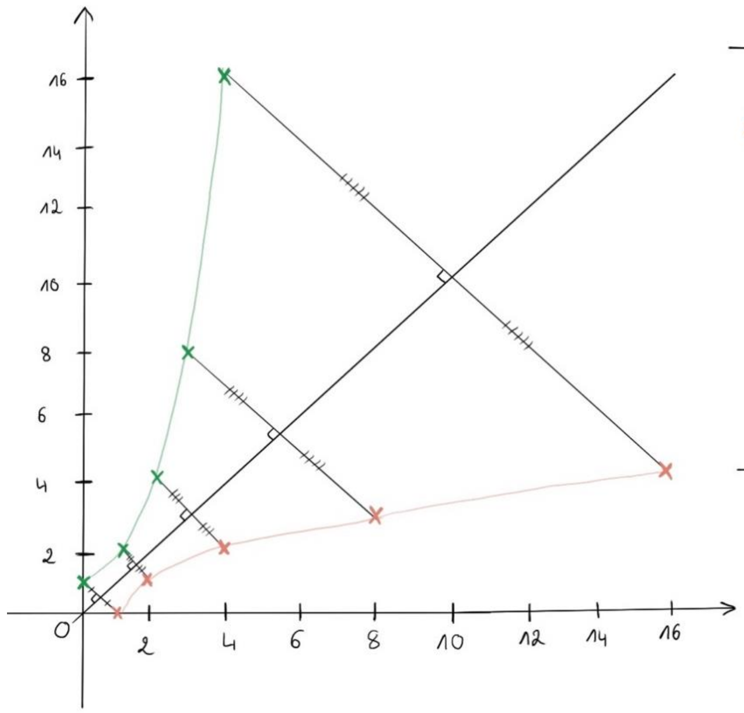
Fonction exponentielle et logarithme

I. Fonction exponentielle et logarithme : leur courbe représentative

Exercice 11

a) Pour $x = 1$ on a $y = 2$ soit $b^1 = 2$ donc $b = 2$

b)



$y = b^x$

x	y
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16

$b^1 = 2 \Leftrightarrow b = 2$

$y = \log_b(x) = \log_2(x)$

x	y
1	0
2	1
4	2
8	3
16	4

→ Exemple de calcul :

$\log_2(4) = \frac{\ln(4)}{\ln(2)} = 2$

II. Fonction exponentielle et logarithme : deux tableaux de valeurs

Exercice 12

- Détermination de a :

$log_b(a) = 0 \Leftrightarrow b^0 = a$

On a : $b \neq 0$ (sinon, dans le premier tableau, toutes les valeurs de b^x seraient nulles car 0 élevé à n'importe quelle puissance est toujours égal à 0). De plus, on sait qu'un nombre non nul élevé à la puissance 0 donne 1.

Donc $b^0 = \boldsymbol{a} = \mathbf{1}$

- Détermination de b :

$log_b(3) = 1 \Leftrightarrow b^1 = 3 \Leftrightarrow \boldsymbol{b} = \mathbf{3}$

- Détermination de c :

$log_b(4c) = 1{,}893 \Leftrightarrow b^{1{,}893} = 4c$

Dans le premier tableau, on voit que : $b^{1{,}893} = 8$

Donc : $4c = 8 \Leftrightarrow \boldsymbol{c} = \frac{8}{4} = \mathbf{2}$

- Détermination de d :

$log_b(20d) = 2{,}096 \Leftrightarrow \; b^{2{,}096} = 20d$

Dans le premier tableau, on voit que : $b^{2{,}096} = 10$

Donc : $20d = 10 \Leftrightarrow \boldsymbol{d} = \frac{10}{20} = \mathbf{0,5}$

FONCTIONS SINUS ET COSINUS

Courbe représentative de la fonction sinus

Lien de la vidéo : https://youtu.be/IEXFTy-Xf9A

Exercice 1

Quelle est la proposition exacte ?

A. Le domaine d'une fonction est l'ensemble des valeurs pour lesquelles cette fonction existe.
B. Le tour d'un cercle trigonométrique correspond à π.
C. $Sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.
D. La lecture du cercle trigonométrique dans le sens des aiguilles d'une montre donne des angles positifs : c'est le sens direct.

Exercice 2

Quelles sont les deux propositions exactes ?

A. La courbe représentative de la fonction sinus est une courbe sinusoïdale oscillant entre 1 et -1.
B. La fonction sinus existe pour les valeurs de x comprises entre 1 et -1.
C. Le domaine de la fonction sinus est R l'ensemble des réels.
D. L'image de la fonction sinus est [-2 π ; π].

Les points d'intersection des courbes des fonctions sinus et cosinus

Lien de la vidéo : https://youtu.be/uMJt1y2hwS8

Exercice 3

Quelles sont les deux propositions exactes ?

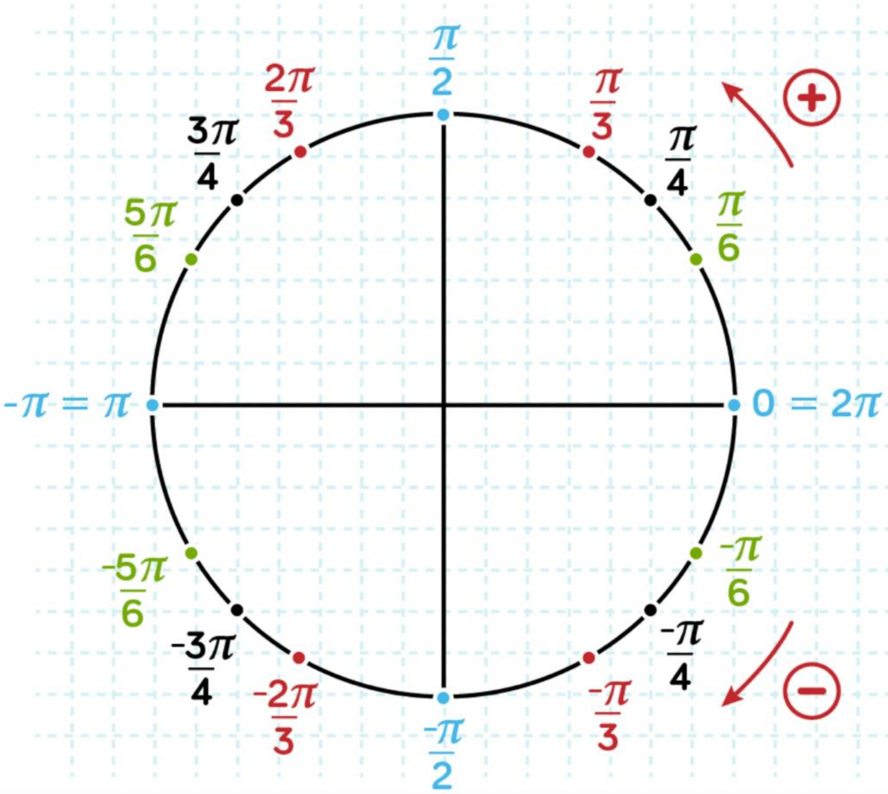
A. Le cercle trigonométrique a un rayon r = 1,5.
B. Les courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus ne se croisent jamais.
C. Les courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus ont un point d'intersection en $\theta = \frac{-3\pi}{4}$.
D. La somme des angles dans un triangle est égale à π.

CORRECTION - FONCTIONS SINUS ET COSINUS

Courbe représentative de la fonction sinus

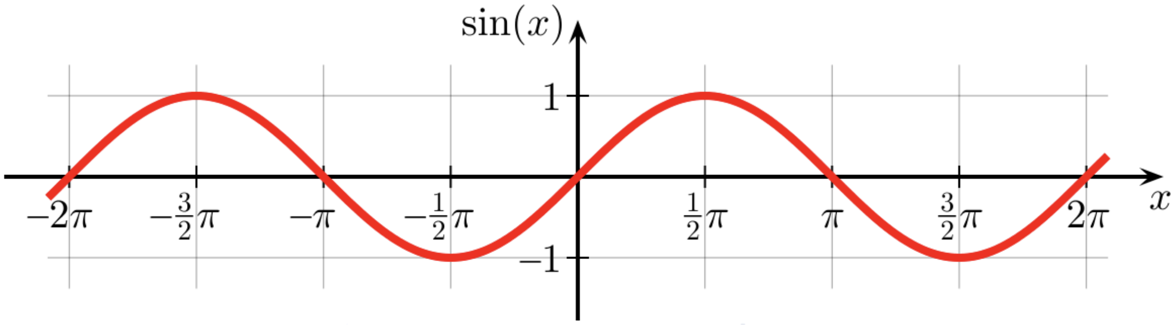
Exercice 1

A. VRAI : c'est la définition. L'ensemble de ces valeurs, que peut prendre la fonction, est appelé image de la fonction.
B. FAUX : π correspond ½ tour de cercle. Ainsi, un tour de cercle correspond à 2π.
C. FAUX : Sin $(\frac{\pi}{2})$ = 1. En localisant ce point sur le cercle on trouve ses coordonnées (0 ;1) avec le cosinus en abscisse et le sinus en ordonnées.
D. FAUX : c'est l'inverse. Le sens direct, donnant des angles positifs, est le sens inverse des aiguilles d'une montre. Ainsi, le sens des aiguilles d'une montre correspond au sens indirect et donne des angles négatifs.



Exercice 2

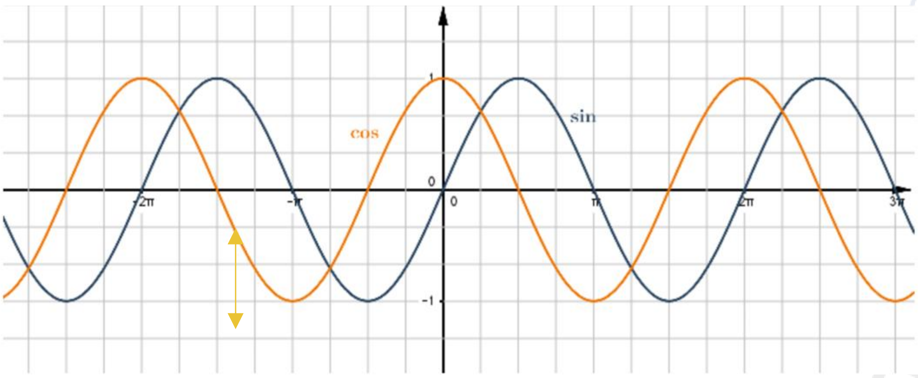
A. VRAI : cf. image
B. FAUX : La courbe peut être continuée à droite et à gauche à l'infini avec en abscisse θ (ou x sur l'image). Cela signifie que la fonction sinus existe pour toutes les valeurs possibles de θ.
C. VRAI : cf. correction B
D. FAUX : Pour rappel, l'image d'une fonction est l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre. Ici l'image est donc sin (x). On voit bien sur la courbe que : -1 $\leq$ sin (x) $\leq$ 1. L'image de la fonction sinus est [-1 ; 1].



Les points d'intersection des courbes des fonctions sinus et cosinus

Exercice 3

A. FAUX : r = 1
B. FAUX : il suffit de représenter les courbes dans un repère. Cf image
C. VRAI : la double flèche jaune sur le graphique correspond bien à $\theta = \frac{-3\pi}{4}$. (Pour trouver cette valeur plus facilement, considérez $-\pi = \frac{-4\pi}{4}$ et $\frac{-\pi}{2} = \frac{-2\pi}{4}$).
D. VRAI : à savoir.



PRIMITIVES ET EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Primitives

I. Des fonctions et leur primitive

Lien de la vidéo : https://youtu.be/Ncm1Kfgzo58

Exercice 1

Donner la dérivée de la fonction $f(x) = 4x^2 + 2x + 15$.

Exercice 2

Trouver une primitive de $g(x) = 2x + 7$

II. Primitive d'une fonction puissance si l'exposant est un entier naturel

Lien de la vidéo : https://youtu.be/wPkc6qGql6o

Exercice 3

Trouver une primitive des fonctions suivantes :

- $f(x) = 2x^6$
- $g(x) = 8x^{-11} + 9$
- $h(x) = -16x^3 + 7x^6$

III. Primitive de $\frac{1}{x}$

Lien de la vidéo : https://youtu.be/y4Mf4kdpYiA

Exercice 4

Quelles sont les propositions exactes :

A. La fonction logarithme népérien est défini pour tout x > 0
B. La primitive de x^{-1} est de la forme $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
C. La courbe de la fonction $\ln|x|$ est symétrique
D. Une primitive de $f(x) = x^{-3}$ est $F(x) = ln|-3| + C$

IV. Primitive d'une somme de fonctions puissance

Lien de la vidéo : https://youtu.be/KKn6dIZEnAM

Exercice 5

Trouver une primitive de $f(x) = \frac{5x^7}{9} + \frac{12\sqrt{x}}{x^{-5}} - 9\sqrt{x} + \frac{1}{x}$

V. Primitives de fonctions trigonométriques et de la fonction exponentielle

Lien de la vidéo : https://youtu.be/vYmJxS7GuJY

Exercice 6

Quelles sont les propositions exactes :

A. La dérivée de la fonction f qui à x associe cos(x) est sin(x)
B. La primitive de $\cos(x)$ est de la forme $\sin(x) + C$
C. Une primitive de $f(t) = \sin(t) - \cos(t) + e^{5t}$ est $F(x) = -\cos(t) - \sin(t) + 5e^{5t} + C$
D. La fonction exponentielle a le même intervalle de définition que la fonction $\frac{1}{x}$

VI. Décomposer une fraction rationnelle en éléments simples pour calculer une intégrale – exemple

Lien de la vidéo : https://youtu.be/cLyTNy9Fq0c

VII. Calculer les primitives d'une fonction de la forme A(x)/B(x) en faisant la division euclidienne des deux polynômes

Lien de la vidéo : https://youtu.be/bpvXyxgWOVI

Exercice 7

Décomposer cette fraction en éléments simples afin de calculer son intégrale :

$$\int_2^6 \frac{-2x+8}{x-1}\,dx$$

A retenir :

Fonction	Primitive
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
e^x	$e^x + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u) + C$
$u'e^u$	e^u

Avec C une constante et u une fonction quelconque.

Equations différentielles du 1er ordre

I. Qu'est-ce qu'une équation différentielle ?

Lien de la vidéo : https://youtu.be/WViu5SiMyeE

Exercice 8

Quelles sont les propositions inexactes :

A. Dans le cas d'une équation différentielle la solution a la forme d'une fonction
B. Les équations différentielles ordinaires font intervenir plusieurs variables
C. La fonction $\exp(-2x)$ est une solution de l'équation différentielle : $5y'' + 3y' - 2y = 0$
D. L'équation différentielle $x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x \frac{\partial y}{\partial x} - 8y = \cos(x)$ est du second ordre et linéaire

II. Equation différentielle dont la solution est une fonction linéaire

Lien de la vidéo : https://youtu.be/JcT_8Dv7BKA

Exercice 9

Trouver la solution générale de l'équation suivante : $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x} + \frac{x}{3}$

Puis donner la solution particulière telle que : $y(1) = \frac{1}{3}$

CORRECTION - PRIMITIVES ET EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Primitives

I. Des fonctions et leurs primitives

Exercice 1

$$f'(x) = \frac{d(4x^2 + 2x + 15)}{dx} = 8x + 2$$

On a : $(kx^n)' = n \times k.x^{n-1}$

Et $(kx)' = k$ et $k' = 0$ avec k et n des constantes

Exercice 2

On cherche ce qui dérivé donne g(x),

On utilise le même raisonnement : $G(x) = x^2 + 7x + C$ avec C une constante

Si on veut vérifier sa réponse il suffit de la **dériver**, on doit obtenir $G'(x) = g(x)$

II. Primitive d'une fonction puissance si l'exposant est un entier naturel

Exercice 3

On sait qu'une primitive de x^n est $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

On a : $F(x) = 2\left(\frac{x^{6+1}}{6+1} + C_1\right) = 2\left(\frac{x^7}{7} + C_1\right) = \frac{2x^7}{7} + 2C_1 = \mathbf{\frac{2x^7}{7} + C_2}$

Lorsqu'on a une somme, on cherche une primitive de chaque élément :

$$G(x) = 8\left(\frac{x^{(-11)+1}}{(-11)+1} + C_1\right) + 9x + C_2 = 8\left(\frac{x^{-10}}{-10} + C_1\right) + 9x + C_2 = -\frac{8x^{-10}}{10} + 8C_1 + 9x + C_2$$

$$= -\mathbf{\frac{4x^{-10}}{5} + 9x + C_3}$$

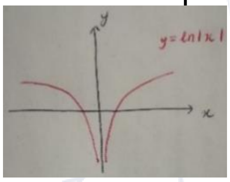
$$H(x) = (-16)\left(\frac{x^{3+1}}{3+1} + C_1\right) + 7\left(\frac{x^{6+1}}{6+1} + C_2\right) = (-16)\left(\frac{x^4}{4} + C_1\right) + 7\left(\frac{x^7}{7} + C_2\right)$$

$$= \frac{-16x^4}{4} + (-16)C_1 + \frac{7x^7}{7} + 7C_2 = \mathbf{-4x^4 + x^7 + C_3}$$

III. Primitive de $\frac{1}{x}$

Exercice 4

Il fallait répondre : A+C

A. VRAI
B. FAUX : si on essaye d'utiliser la formule donnée on obtiendra 0 au dénominateur ce qui est impossible ! Une primitive de x^{-1} serait $\ln|x| + C$
C. VRAI : 

D. FAUX : $\ln|x| + C$ est utile dans le cas de x^{-1} , autrement on peut assimiler $f(x) = x^{-3}$ à x^n sa primitive aurait la forme $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$. On a : $F(x) = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{x^{-2}}{-2} + C$

IV. Primitive d'une somme de fonctions puissance

Exercice 5

On va chercher une primitive de chaque élément :

- $\frac{5x^7}{9} = \frac{5}{9} \times x^7 \rightarrow$ PRIMITIVE : $\frac{5}{9} \times \frac{x^{7+1}}{7+1} + C = \frac{5x^8}{72} + C$

- $\frac{12\sqrt{x}}{x^{-5}} = \frac{12 \times x^{1/2}}{x^{-5}} = 12 \times x^{1/2} \times x^{-(-5)} = 12 \times x^{1/2} \times x^5 = 12 \times x^{11/2}$
  -> PRIMITIVE : $12 \times \frac{x^{\frac{11}{2}+1}}{\frac{11}{2}+1} + C = 12 \times \frac{x^{13/2}}{13/2} + C = \frac{24}{13}x^{13/2} + C$

- $-9\sqrt{x} = -9 \times x^{1/2} \rightarrow$ PRIMITIVE : $-9 \times \frac{x^{\left(\frac{1}{2}\right)+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = -9 \times \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -6x^{\frac{3}{2}} + C$

- $\frac{1}{x} = x^{-1} \rightarrow$ PRIMITIVE : $\ln|x| + C$

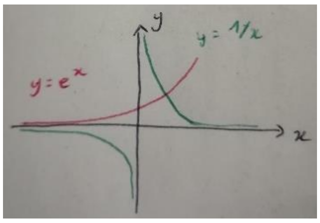
On fait la somme : $\mathbf{F(x) = \frac{5x^8}{72} + \frac{24}{13}x^{13/2} - 6x^{\frac{3}{2}} + \ln|x| + C}$

V. Primitives de fonctions trigonométriques et de la fonction exponentielle

Exercice 6

Il fallait répondre : B+C

A. FAUX : $(\cos(x))' = -\sin(x)$
B. VRAI : si on dérive $\sin(x)$ on obtient $\cos(x)$
C. VRAI : attention la dérivée de e^{kx}avec k la constante et x l'inconnu est de la forme ke^{kx}
D. FAUX : la fonction $\frac{1}{x}$ est défini pour tout $x \neq 0$ tandis que la fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$

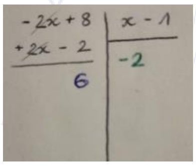
E. 

VI. Calculer les primitives d'une fonction de la forme A(x)/B(x) en faisant la division euclidienne des deux polynômes

Exercice 7

On commence par la division euclidienne :

On cherche en $-2x+8$ combien de fois on a $x-1$ et d'abord en **-2x** combien de fois x :



On obtient comme quotient **-2** et comme reste **6,** cela signifie que **:**

$$\frac{-2x+8}{x-1} = \mathbf{-2} + \frac{\mathbf{6}}{\mathrm{x}-1}$$

$$\int_2^6 \mathbf{-2} + \frac{\mathbf{6}}{\mathrm{x}-1}\,dx$$

$$= [\mathbf{-2x} + \mathbf{6l\,n(x-1)}]_2^6$$

$$= (\mathbf{-2} \times \mathbf{6} + \mathbf{6l\,n(6-1)}) - (\mathbf{-2} \times \mathbf{2} + \mathbf{6l\,n(2-1)})$$

$$= -12 + 6\ln(5) + 4 - 6\ln(1)$$

$$= \mathbf{-8 + 6ln\,(5)}$$

Equations différentielles du 1^er^ ordre

I. Qu'est-ce qu'une équation différentielle ?

Exercice 8

Il fallait répondre : C+D

A. VRAI : On peut même dire que la solution est un groupe de fonctions car plusieurs fonctions peuvent être solutions d'une équation différentielle.

B. VRAI : On a : $y'' = -2\exp(-2x)$

F. $y' = (-2) \times (-2)\exp(-2x) = 4\exp(-2x)$

G. $y = \exp(-2x)$

H. Alors : $5 \times -2\exp(-2x) + 3 \times 4\exp(-2x) - 2\exp(-2x)$

I. $= -10\exp(-2x) + 12\exp(-2x) - 2\exp(-2x) = 0$

C. FAUX : Une équation différentielle est dite ordinaire si elle ne fait intervenir qu'une seule variable.

D. FAUX : L'équation n'est pas linéaire on trouve en facteur x^2

II. Equation différentielle dont la solution est une fonction linéaire

Exercice 9

$$\int dy = \int (\sqrt{x} + \frac{x}{3})dx$$

$$y = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} + C = \boldsymbol{\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{1}{3} + C}$$

On cherche la constante C de sorte que $y(1) = \frac{1}{3}$:

$$\frac{1}{3} = \frac{2 \times 1^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{1}{3} + C$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2 \times 1}{3} + C$$

$$C = -\frac{2}{3}$$

On a donc la solution particulière : $y = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \boldsymbol{\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{1}{3}}$

LOIS DISCRETES ET LOI BINOMIALE

Succession d'épreuves indépendantes

I. Calculer une probabilité à l'aide d'un arbre

Lien de la vidéo : https://youtu.be/p2L8uoiVMOg

Exercice 1

Dans une urne, on met une boule noire et une boule blanche. On effectue 4 tirages avec remise. Calculer à l'aide d'un arbre la probabilité de tirer exactement deux fois une boule blanche.

II. Espace probabilisé : exemples

Lien de la vidéo : https://youtu.be/TdCug14-l0s

Exercice 2

On lance simultanément un dé à 6 faces et un dé à 4 faces. Quelle est la probabilité d'obtenir deux chiffre successifs (quelque soit l'ordre) ? On pourra représenter la situation par un tableau à double entrée.

III. Probabilité d'évènements indépendants et successifs

Lien de la vidéo : https://youtu.be/QuYw7vuD0TQ

Exercice 3

On met dans un sac trois jetons indiscernables au toucher, deux rouges et un bleu. Quelle est la probabilité d'obtenir la séquence rouge-rouge-bleu, sachant que le tirage est effectué avec remise ?

Coefficients binomiaux

I. Une généralisation avec les coefficients binomiaux

Lien de la vidéo : https://youtu.be/XDWsGeSkA_w

Exercice 4

Calculer :

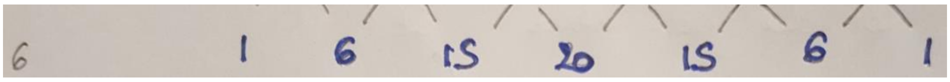
a. 5 !
b. C_{15}^{6}
c. $P(avoir\ 6\ faces\ en\ 15\ lancers)$

II. Le triangle de Pascal

Lien de la vidéo : https://youtu.be/0gfTuqvK2-M

Exercice 5

Dessiner la suite du triangle de Pascal jusqu'à 9.



III. Lien entre la formule du binôme et les combinaisons

Lien de la vidéo : https://youtu.be/xCfEY-qc_KI

Exercice 6

Ecrire sous forme développée $(a+b)^2$

Schéma de Bernoulli et loi binomiale

I. Le schéma de Bernoulli et la loi binomiale

Lien de la fiche : https://fr.khanacademy.org/math/terminale-specialite-math/xf1ac4b39acd29386:probabilites/xf1ac4b39acd29386:schema-de-bernoulli-et-loi-binomiale/a/binomial-probability-basic

A retenir : On appelle schéma de Bernoulli de paramètres n et p :

- La répétition de **n** épreuves **identiques**
- **Indépendantes**
- Où seulement **deux issues** sont possibles : « succès » ou « échec »
- Et où la probabilité du succès vaut **p**

La probabilité d'obtenir k succès vaut : $P(k\ succès) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$

D'après le site Khan Academy

II. Loi binomiale

Lien de la vidéo : https://youtu.be/_WJserxjpOg

Exercice 7

Calculer la probabilité d'obtenir 7 faces sur 11 lancers d'une pièce.

Attention ! Il y a une erreur de notation dans la vidéo : la combinaison de k éléments parmi n se note $\binom{n}{k}$

Lien de la vidéo : https://youtu.be/YDT0zE1hW0E

Attention ! Il y a une erreur de notation dans la vidéo : la combinaison de k éléments parmi n se note $\binom{n}{k}$

Exercice 8

On lance un pièce 7 fois d'affilée. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de face.

A) Quelle loi suit la variable X ?

B) Quels sont ses paramètres ?

C) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 4 faces ?

III. Nombre de penalties réussis sur 6 essais

Lien de la vidéo : https://youtu.be/ORU8A3ZhYGw

Exercice 9

Calculer la probabilité de réussir 5 penalties sur 8 sachant que p=0,4.
Avec X, le nombre de penalties réussis.

IV. Représentation graphique de la loi binomiale.

Lien de la vidéo : https://youtu.be/h_D-zMFbWqs

Exercice 10

Construire la représentation graphique correspondant aux données de l'exercice 9.

V. Espérance et variance dans le cas de la loi de Bernoulli – exemple.

Lien de la vidéo : https://youtu.be/E_qalVMkOa4

Exercice 11

Si maintenant le pourcentage d'avis favorables devient égal à 85%. Calculer la moyenne, la variance et l'écart type.

VI. Espérance mathématique dans le cas de la loi binomiale.

Lien de la vidéo : https://youtu.be/NCgxRmRcxQM

Exercice 12

Calculer l'espérance des données de l'exercice 9.

A retenir : Si X est une variable aléatoire comptant le nombre de succès lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes et où la probabilité du succès est p, la loi de probabilité de X est appelée la **loi binomiale de paramètres n et p.**

On a : $P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$

L'espérance de X est : $E(X) = n \times p$, sa **variance** est $V(X) = n \times p \times (1-p)$

CORRECTION - LOIS DISCRETES ET LOI BINOMIALE

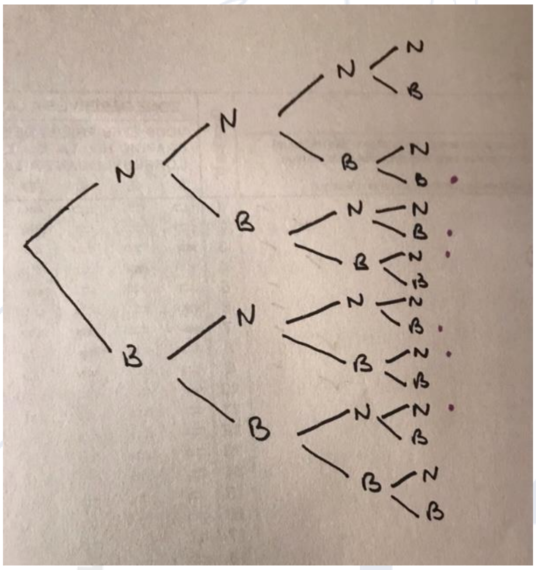
Correction des exercices

Succession d'épreuves indépendantes

I. Calculer une probabilité à l'aide d'un arbre

Exercice 1

On représente la situation par l'arbre ci-dessous :



On a en tout 16 issues possibles.

Les issues favorables sont représentées par les points violets, il y en a 6.

La probabilité d'obtenir exactement 2 boules blanches vaut donc $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

II. Espace probabilisé : exemples

Exercice 2

On représente la situation par le tableau ci-dessous :

	1	2	3	4	5	6
1	1 1	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6
2	2 1	2 2	2 3	2 4	2 5	2 6
3	3 1	3 2	3 3	3 4	3 5	3 6
4	4 1	4 2	4 3	4 4	4 5	4 6

On a en tout 24 issues possibles (24 cases dans le tableau)

Les issues favorables sont en rouge, il y en a 7.

La probabilité d'obtenir deux chiffres consécutifs vaut donc $\frac{7}{24}$.

III. Probabilité d'évènements indépendants et successifs

Exercice 3

On a dans le sac 2 jetons rouges et un jeton bleu, soit 3 jetons au total.

La probabilité de tirer un jeton rouge est donc de $\frac{2}{3}$ et celle de tirer un jeton bleu est de $\frac{1}{3}$.

Comme les jetons sont indiscernables au toucher et que le tirage est fait avec remise, on peut considérer que les évènements sont indépendants.

La probabilité d'obtenir la séquence rouge-rouge-bleu, notée $P(RRB)$, vaut donc :

$$P(R_1) \times P(R_2) \times P(B_3) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$$

Coefficients binomiaux

I. Une généralisation avec les coefficients binomiaux.

Exercice 4

Calculer :

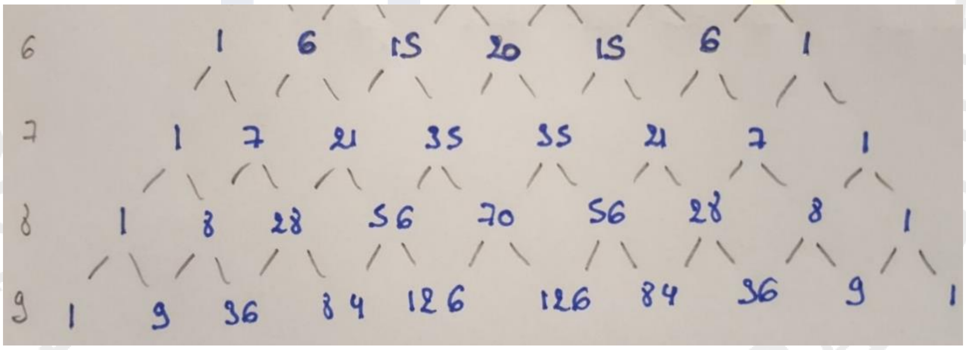
a. 5 ! = 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120

b. $C_{15}^{6} = \frac{15!}{(15-6)! \times 6!} = 5005.$

c. $P(avoir\ 6\ faces\ en\ 15\ lancers) = \frac{\frac{15!}{9! \times 6!}}{2^{15}} = \frac{C_{15}^{6}}{2^{15}} \approx 0{,}15274$

II. Le triangle de Pascal

Exercice 5



III. Lien entre la formule du binôme et les combinaisons

Exercice 6

$$(a+b)(a+b)$$

$$= a(a+b) + b(a+b)$$

$$= aa + ab + ba + bb$$

$$\rightarrow a^2 + a^1b^1 + b^1a^1 + b^2$$

$$\rightarrow \binom{2}{0}a^2b^0 + \binom{2}{1}a^1b^1 + \binom{2}{1}b^1a^1 + \binom{2}{2}b^2$$

Schéma de Bernoulli et loi binomiale

IV. Loi binomiale

Exercice 7

$$P(X=6) = \binom{7}{11} \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{11 \times \cancel{10} \times \overset{3}{\cancel{9}} \times \overset{\cancel{2}}{\cancel{8}} \times \cancel{7}}{\cancel{7} \times \cancel{6} \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} \times \frac{1}{128}$$

$$= 11 \times \frac{1}{128} = \frac{11}{128}$$

Exercice 8

A) Il s'agit d'une répétition d'épreuves identiques et indépendantes à deux issues : succès ou échec. X suit donc une loi binomiale.

B) $n = 7$ et $p = 0{,}5$

C)

$$P(X=4) = \binom{7}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^7$$

$$= \frac{7!}{4! \times (7-4)!} \times \frac{1}{128}$$

$$= \frac{7!}{4! \times 3!} \times \frac{1}{128}$$

$$= 0{,}273$$

V. Nombre de penalties réussis sur 6 essais

Exercice 9

On a p = 0,4 ; c'est la probabilité de réussite.

Réussir 5 penalties sur 8 = $0{,}4 \times 0{,}4 \times 0{,}4 \times 0{,}4 \times 0{,}4 \times 0{,}6 \times 0{,}6 \times 0{,}6$

$$\rightarrow \binom{5}{8} = \frac{8!}{(8-5!).5!} = \frac{8!}{3!\ 5!} = \frac{8\times7\times6\times\cancel{5}\times\cancel{4}\times\cancel{3}\times\cancel{2}\times\cancel{1}}{3\times2\times1\cdot\cancel{5}\times\cancel{4}\times\cancel{3}\times\cancel{2}\times\cancel{1}} = 56$$

$$P(X=6) = \binom{5}{8} \times 0{,}4^5 \times 0{,}6^3 = 56 \times 0{,}4^5 \times 0{,}6^3$$

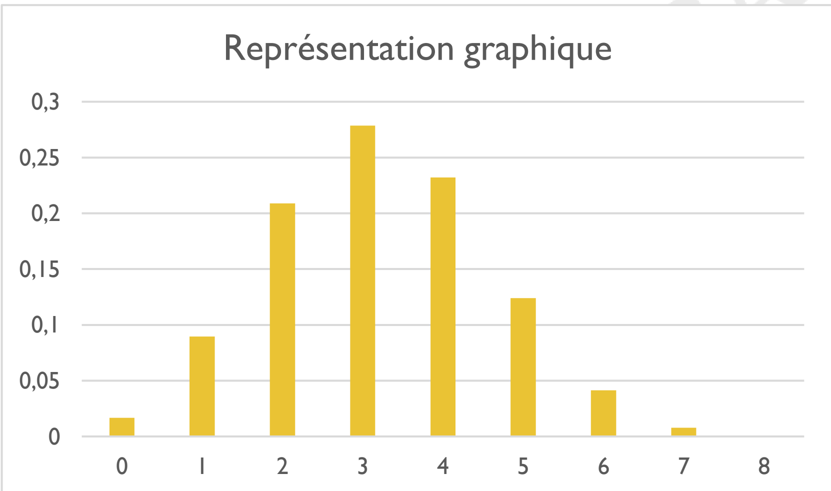
$$\simeq 0{,}1239$$

VI. Représentation graphique de la loi binomiale

Exercice 10

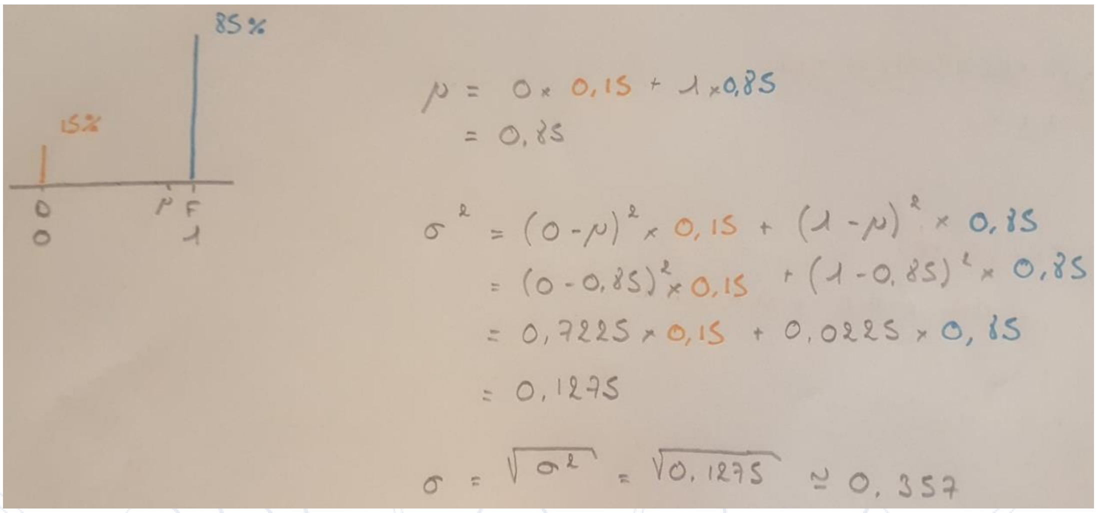
N	8
$P(but)$	0,4
$P(raté)$	0,6

K	$P(but)^k \times P(raté)^{(n-k)}$	Combinaison de k parmi n	$P(X = k)$
0	0,01679616	1	0,0167962
1	0,01119744	8	0,0895795
2	0,00746496	28	0,2090189
3	0,00497664	56	0,2786918
4	0,00331776	70	0,2322432
5	0,00221184	56	0,123863
6	0,00147456	28	0,0412877
7	0,00098304	8	0,0078643
8	0,00065536	1	0,0006554



VII. Espérance et variance dans le cas de la loi de Bernoulli – exemple

Exercice 11



VIII. Espérance mathématique dans le cas de la loi binomiale

Exercice 12

$$E = n \times p = 8 \times 0{,}4 = 3{,}2$$

PROBABILITÉS

Somme de variables aléatoires

Lien des vidéos :

https://youtu.be/qaFPHrZ0Sds

https://youtu.be/fI1vcIjeJCo

https://youtu.be/R-YYJQnGaw4

https://youtu.be/rxnNV3EMMFQ

https://youtu.be/GTIuR9DWoJY

Exercice : soit deux variables aléatoires indépendantes X et Y qui observent les résultats de 2 séries indépendantes de 20 lancés d'un dé équilibré. On considère deux autres variables aléatoires telle que et A = X + Y et B = X – Y.

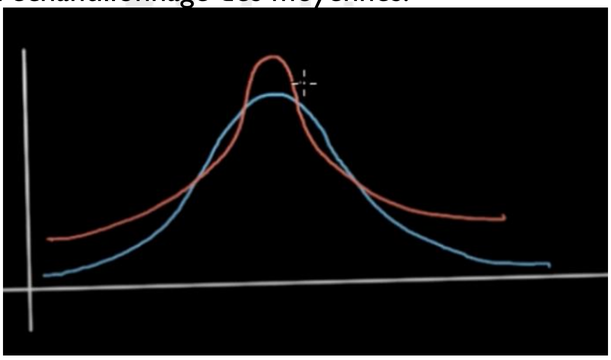
On donne la loi de probabilité de X

X	1	2	3	4	5	6
Répétition	7	1	3	2	6	1
$P(x = x_i)$	0,35	0,05	0,15	0,1	0,3	0,05

Et la loi de probabilité de Y

Y	1	2	3	4	5	6
Répétition	5	4	1	3	2	5
$P(x = x_i)$	0,25	0,2	0,05	0,15	0,1	0,25

1) Calculer E(A)
2) Calculer var(B)
3) VRAI ou FAUX : Selon le théorème de la limite centrée, plus on augmente la taille des échantillons sur lesquels on travaille, plus on va s'approcher de la représentation d'une loi normale en réalisant une distribution d'échantillonnage d'une variable aléatoire.
4) Corriger la phrase : Plus on augmente la taille des échantillons n, plus la courbe sera centrée sur la moyenne est plus grand sera l'écart type, car σ est proportionnel à n.
5) La courbe en rouge sur l'image ci-dessous est un aplatissement négatif de la courbe bleue.
6) On a réalisé un échantillonnage sur une distribution de moyennes d'une variable aléatoire de variance 5,94. Les échantillons réalisés comprenaient 16 valeurs chacun. Calculer l'écart-type de la distribution d'échantillonnage des moyennes.



CORRECTION - PROBABILITÉS

Somme de variables aléatoires

1) Calculer E(A)

$E(A) = E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

$E(X) = \frac{1.7+2.1+3.3+4.2+5.6+6.1}{20} = 3{,}1$ et $E(Y) = \frac{1.5+2.4\ 3.1+4.3+5.2+6.5}{20} = 3{,}4$

$E(A) = 3{,}1 + 3{,}4 = 6{,}5$

2) Calculer var(B)

$Var(B) = Var(XY) = Var(X) + Var(-Y) = Var(X) + Var(Y)$ car $Var(-Y) = Var(Y)$

$$Var(X) = E \times ((x - \mu_x)^2) \ = \sum_{i=1}^{n} P(x = x_{i)}(x_i - E(X))^2$$

$$Var(X) = 0{,}35(1-3{,}1)^2 + 0{,}05(2-3{,}1)^2 + 0{,}15(3-3{,}1)^2 + 0{,}1(4-3{,}1)^2 + 0{,}3(5-3{,}1)^2 + 0{,}05(6-3{,}1)^2 = 3{,}19$$

Et

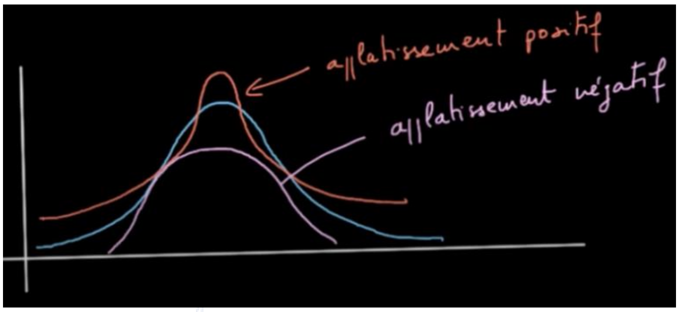
$$Var(Y) = 0{,}25(1-3{,}4)^2 + 0{,}2(2-3{,}4)^2 + 0{,}05(3-3{,}4)^2 + 0{,}15(4-3{,}4)^2 + 0{,}1(5-3{,}4)^2 + 0{,}25(6-3{,}4)^2 = 3{,}84$$

Donc : Var(B) = 3,19 + 3,84 = **7,03**

3) **VRAI**. La distribution d'échantillonnage = distribution d'une certaine statistique (ça peut être la moyenne, la fréquence, la proportion…) qu'on fait à partir d'une série d'échantillons prélevés dans une série de données qui suit une loi X.
TLC = Quand n (taille de l'échantillon) tend vers +infini, on aura une distribution normale

4) Plus on augmente la taille des échantillons n, plus la courbe sera centrée sur la moyenne est plus **petit** sera l'écart type, car σ est **inversement** proportionnel à n. C'est logique car l'écart-type est une mesure de la dispersion des valeurs ! Plus les échantillons sont grands, moins les valeurs sont dispersées, moins l'écart-type est grand.

5) **FAUX** : dans le cas d'un aplatissement positif le pic est plus pointu et le coefficient d'aplatissement est positif. Dans le cas d'un aplatissement négatif, le pic est plus étalé et le coefficient d'aplatissement est négatif.



6) On a la formule : $\sigma_x^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ avec σ_x^2 la variance de la distribution d'échantillonnage des moyennes, σ^2 la variance de la distribution initiale et n la taille des échantillons sélectionnés.

$\sigma_x^2 = \frac{5,94}{16}$ = 0,371

Il faut ensuite penser à convertir la variance obtenue en un écart-type :

$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0,371}$ = **0,61**

PROBABILITES

Concentration, loi des grands nombres

I. Loi des grands nombres

Lien de la vidéo : https://youtu.be/zOhc6I29lqI

Exercice I

On a un sac rempli de 33 boules rouges et de 33 autres blanches. On va tirer au sort 33 de ces boules.

On a X, le nombre de boules blanches tirées.

Au premier essai on tire 6 boules blanches et 27 rouges. On en fait une multitude d'autre tirage.

Si on fait la moyenne de tous ces tirages, vers quelle valeur la moyenne du nombre de boules blanches tirées va tendre ?

CORRECTION - PROBABILITES

Concentration, loi des grands nombres

I. Loi des grands nombres

Exercice I

On va commencer par calculer l'espérance du nombre de boules blanches tirées :

$$E\ (X) = 66 \times \frac{1}{2} = 33$$

En suivant la loi des grands nombres avec *n*, le nombre de tirage, qui tend vers l'infini, alors la moyenne du nombre de boules blanches tirées à chaque fois est égale à l'espérance et donc à 33.

LOI A DENSITE

Notion de loi a densité

Densité de probabilité.

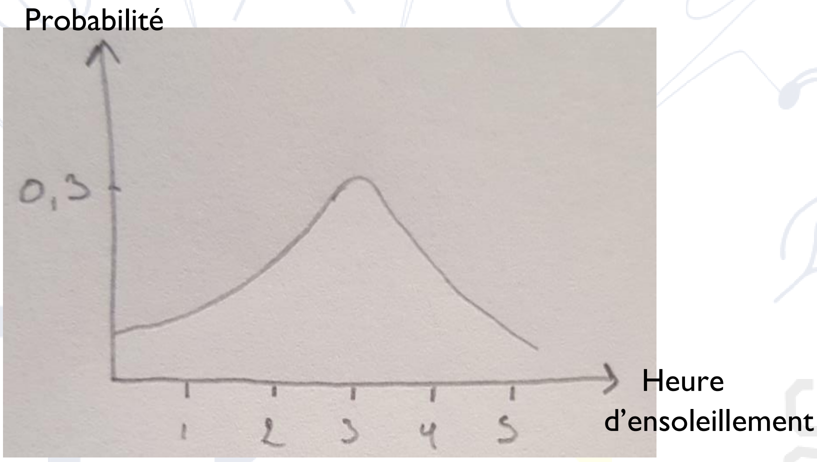
Lien de la vidéo : https://youtu.be/m9vQx9gHrLA

Exercice 1

On a X, le nombre d'heure d'ensoleillement dans une journée.

Hachurer les probabilités suivantes :

a. $P(X = 3)$
b. $P(X > 1)$
c. $P(X < 4)$
d. $P(2 < X < 5)$



CORRECTION - LOI A DENSITE

Notion de loi à densité

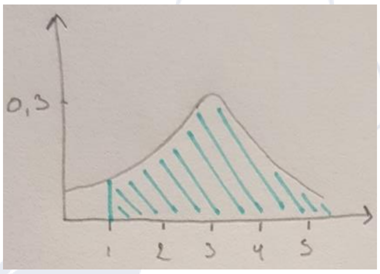
Densité de probabilité.

Exercice I

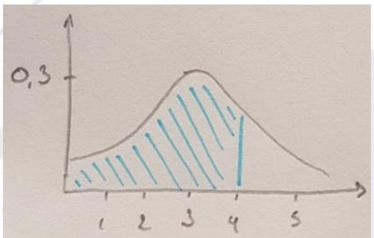
a. $P(X = 3) = 0.$

Attention la probabilité que X soit égale à une valeur exacte est nulle.

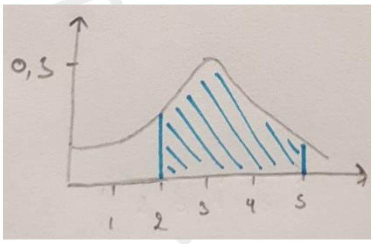
b. $P(X > 1)$



c. $P(X < 4)$



d. $P(2 < X < 5)$



STATISTIQUES A DEUX VARIABLES QUANTITATIVES

Nuage de points

I. Construire un nuage de points

Lien de la vidéo : https://youtu.be/vzNhx4mcsRg

Exercice 1
Créer un nuage de points à partir des données du tableau suivant :

	Etudiant 1	Etudiant 2	Etudiant 3	Etudiant 4	Etudiant 5	Etudiant 6
Note obtenue au bac en maths (/20)	17	10	14	5	16	13
Note obtenue en LSpS en maths (/20)	16	19	8	15	18	6

II. Construire un nuage de point pertinent

Lien de la vidéo : https://youtu.be/KBG4Vf0q6KE

Exercice 2
Créer un nuage de points à partir des données du tableau suivant :

	Etudiant 1	Etudiant 2	Etudiant 3	Etudiant 4	Etudiant 5	Etudiant 6
Temps passé à travailler les maths en LSpS (en heures/jour)	1	3	0.5	2	2	0.25
Note obtenue en LSpS en maths (/20)	16	19	8	15	18	6

Ajustement affine

I. Introduction à la droite d'ajustement

Lien de la vidéo : https://youtu.be/ELoz-bwk0So

Exercice 3

1) A partir des données suivantes, créer **sur un tableur** (type Excel®) un nuage de points, et déterminer l'équation de la droite associée.

Âge (en années)	14	15	16	17	18	19	20
Nombre total de séries regardées	7	10	14	17	21	25	28

2) A partir de cette équation, prédire le nombre de séries regardées par cet individu lorsqu'il aura 30 ans.

II. Tracer au jugé une droite d'ajustement

Lien de la vidéo : https://youtu.be/Wxe5RxjhcWE

Exercice 4

1) Concernant le nuage de points trouvé dans l'exercice 1, existe-t-il une bonne droite d'ajustement ? Si oui, la tracer.
2) Concernant le nuage de points trouvé dans l'exercice 2, existe-t-il une bonne droite d'ajustement ? Si oui, la tracer.
3) Quelle conclusion peut-on en tirer ?

Droite des moindres carrés

I. Droite de régression et méthode des moindres carrés

Lien de la vidéo : https://youtu.be/vrKlvAIsqjg

II. Démonstration

Lien vidéo 1 : https://youtu.be/XkeZcW5wqQQ

Lien vidéo 2 : https://youtu.be/uedKHoXiPQQ

Lien vidéo 3 : https://youtu.be/BrrOB6UOy0A

Lien vidéo 4 : https://youtu.be/P1C8bUOdILE

__Remarque__ : La démonstration est un peu longue, mais je te conseille vivement de la regarder car les calculs sont expliqués en détails, et certains sujets abordés te seront utiles en LSpS (notamment les dérivées partielles) !

Exercice 5

On souhaite étudier le lien entre le temps de sommeil en heures/nuit (variable X) et le temps d'activité physique en heures/jour (variable Y).

On sait que $cov(X,Y) = 1{,}92$ et que $\sigma_x = 2{,}09$. De plus, on sait que la droite passe par le point (4 ; 0).

Quelle est la formule de la droite qui lie ces deux variables ? Que peut-on en conclure ?

Remarque : Tu apprendras en cours à calculer une covariance à partir de données !

Corrélation et causalité

I. Corrélation et causalité

Lien de la vidéo : https://youtu.be/5SyWBL6JurU

Exercice 6

Un étudiant en LSpS dort 10 heures par nuit, il est donc en pleine forme. De ce fait, il travaille efficacement, et a le temps de faire du sport tous les soirs. Quelles sont les propositions vraies ?

A. Le sommeil est la cause d'un travail efficace.
B. Le temps de faire du sport est la cause d'un travail efficace.
C. Le temps de faire du sport est la conséquence d'un travail efficace.
D. Le temps de faire du sport, le travail et le sommeil sont corrélés

II. Nuage de points et corrélation linéaire

Lien de la fiche : https://fr.khanacademy.org/math/terminale-option-math-complementaires/xd9273d115c91e8d4:statistique-a-deux-variables-quantitatives/xd9273d115c91e8d4:correlation-et-causalite/a/constructing-and-interpreting-a-scatterplot

III. Résumé : Nuage de points et corrélation

Lien de la fiche : https://fr.khanacademy.org/math/terminale-option-math-complementaires/xd9273d115c91e8d4:statistique-a-deux-variables-quantitatives/xd9273d115c91e8d4:correlation-et-causalite/a/scatterplots-and-correlation-review

IV. Résumé : Coefficient de corrélation

Lien de la fiche : https://fr.khanacademy.org/math/terminale-option-math-complementaires/xd9273d115c91e8d4:statistique-a-deux-variables-quantitatives/xd9273d115c91e8d4:correlation-et-causalite/a/correlation-coefficient-review

Ajustement non affine – Application des ajustements

I. La droite d'ajustement : Exemple des téléphones portables

Lien de la fiche : https://fr.khanacademy.org/math/terminale-option-math-complementaires/xd9273d115c91e8d4:statistique-a-deux-variables-quantitatives/xd9273d115c91e8d4:ajustement-non-affine-application-des-ajustements/a/equations-of-trend-lines-phone-data

II. Résumé : La régression linéaire

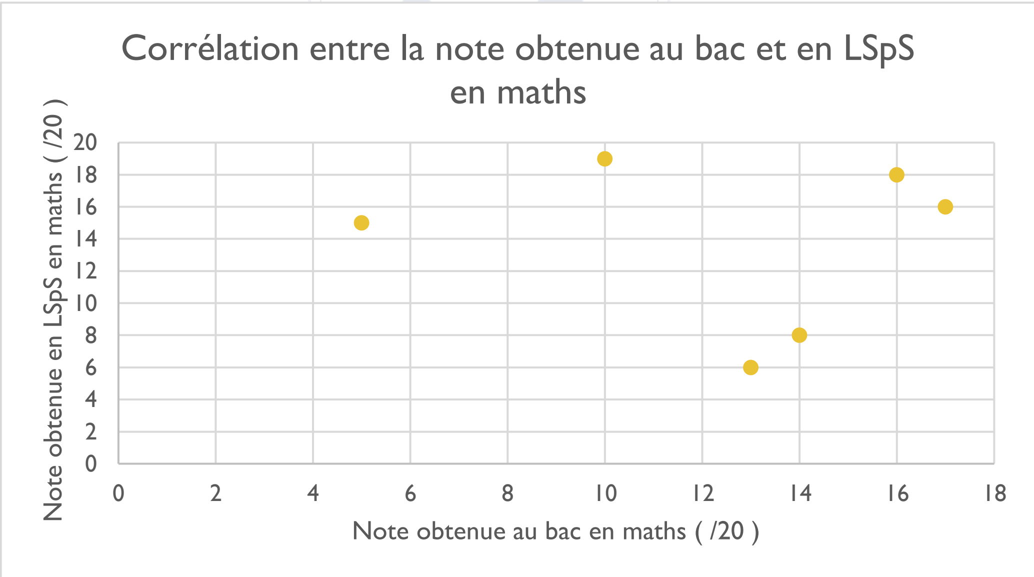
Lien de la fiche : https://fr.khanacademy.org/math/terminale-option-math-complementaires/xd9273d115c91e8d4:statistique-a-deux-variables-quantitatives/xd9273d115c91e8d4:ajustement-non-affine-application-des-ajustements/a/linear-regression-review?modal=1

CORRECTION - STATISTIQUES A DEUX VARIABLES QUANTITATIVES

Nuage de points

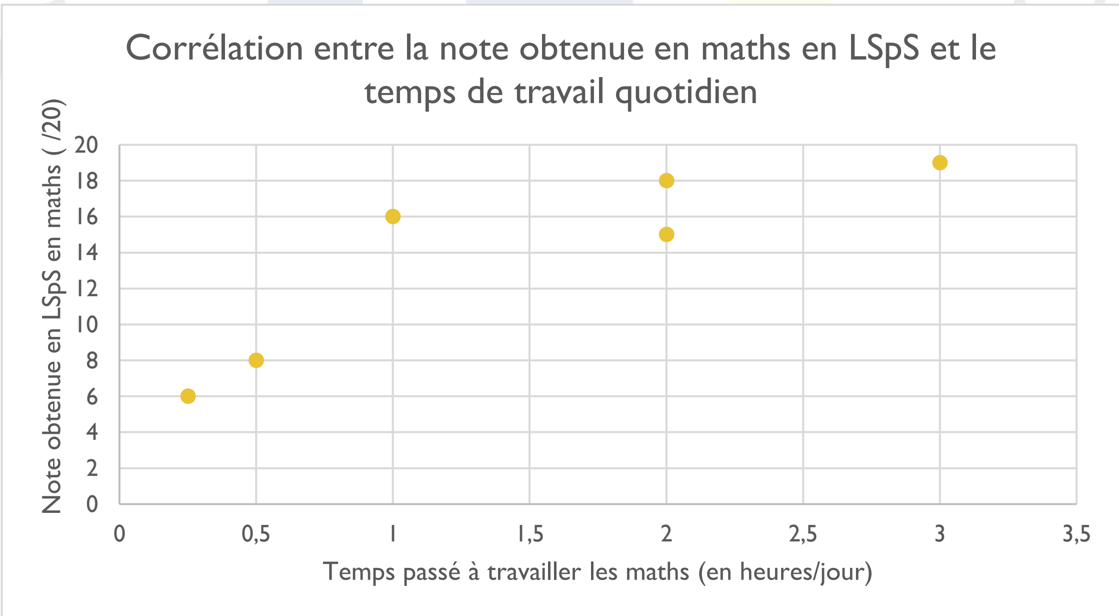
I. Construire un nuage de points

Exercice 1



II. Construire un nuage de point pertinent

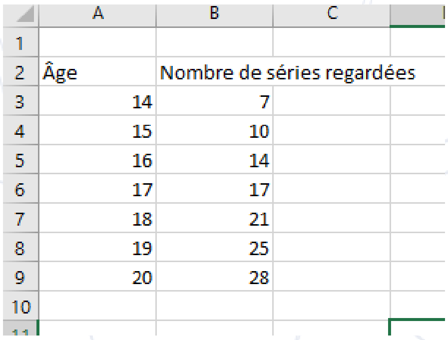
Exercice 2



III. Introduction à la droite d'ajustement

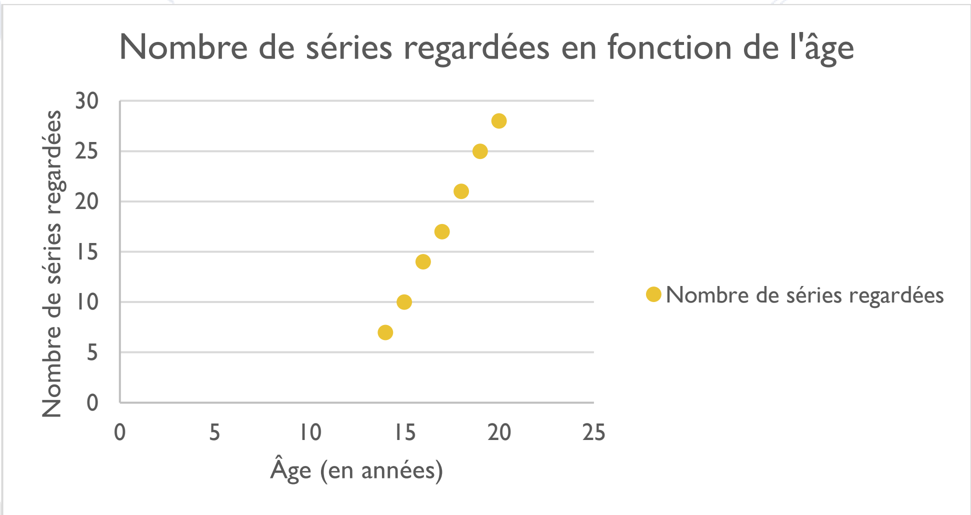
Exercice 3

1) Je rentre d'abord les données dans un tableau :

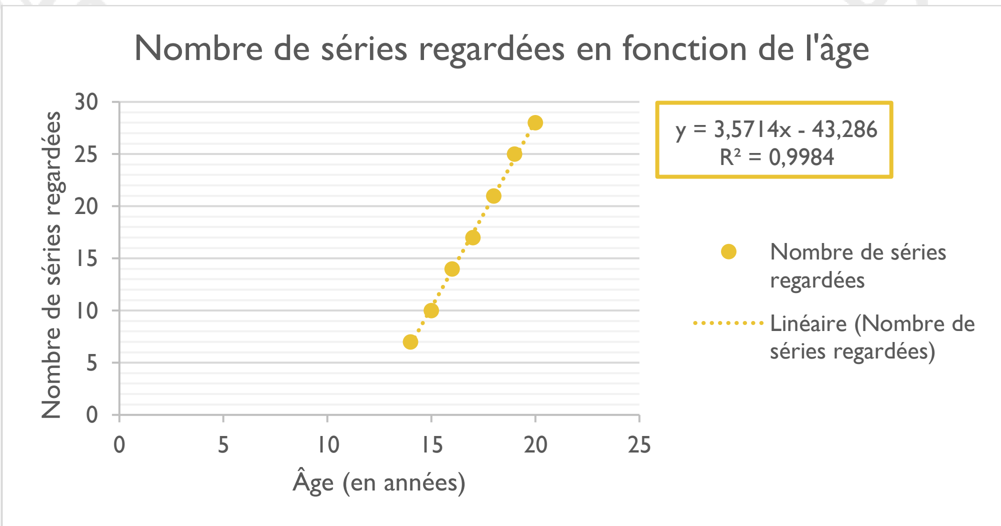


	A	B	C
1			
2	Âge	Nombre de séries regardées	
3	14	7	
4	15	10	
5	16	14	
6	17	17	
7	18	21	
8	19	25	
9	20	28	
10			

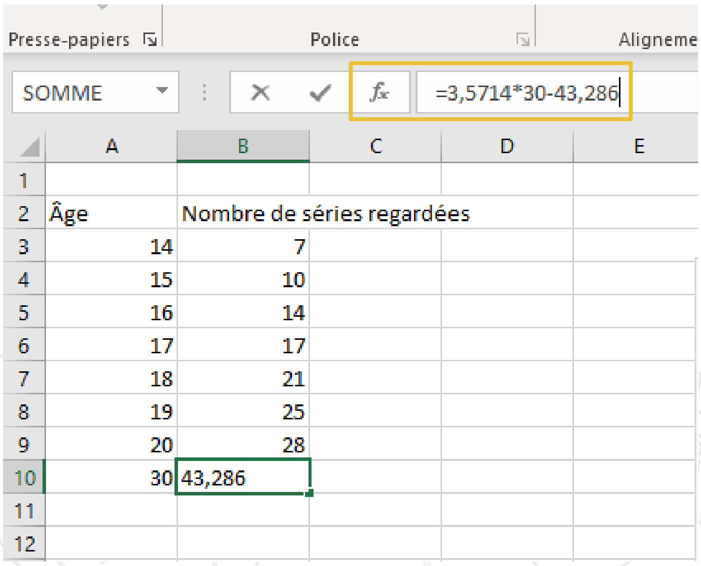
Ensuite je créé un nuage de points (Dans Insertion → Graphiques → Nuages de points)



Enfin j'affiche l'équation de la droite (Dans Disposition rapide -> Dispositif 9)



2) Pour répondre à cette question, il faut remplacer x par 30 dans l'équation trouvée à la question 1 :



	A	B
1		
2	Âge	Nombre de séries regardées
3	14	7
4	15	10
5	16	14
6	17	17
7	18	21
8	19	25
9	20	28
10	30	43,286
11		
12		

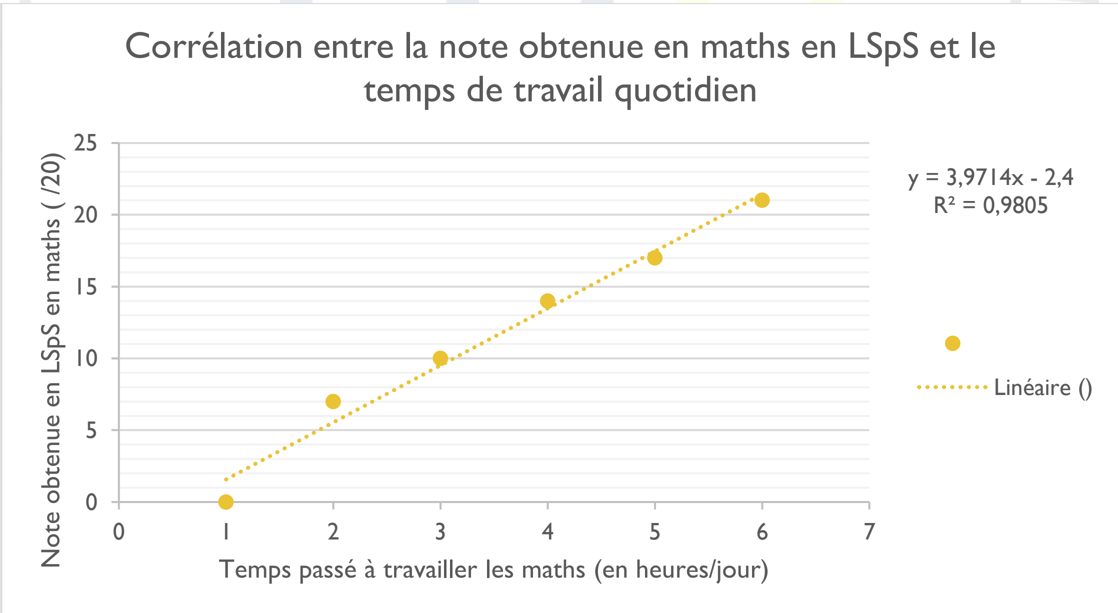
On peut donc prédire qu'à 30 ans, cet individu aura regardé **43,286 séries**.

IV. Tracer au jugé une droite d'ajustement

Exercice 4

1) Non, pour ce graphique il n'y a pas de droite d'ajustement possible, les points semblent dispersés aléatoirement.

2) Oui, on peut tracer une droite d'ajustement qui est la suivante :



3) On peut en conclure que la note obtenue en LSpS augmente linéairement avec le travail quotidien en maths, mais n'est pas liée à la note au bac.

Droite des moindres carrés

I. Droite de régression et méthode des moindres carrés

(Pas d'exercice)

II. Démonstration

Exercice 5

On cherche une équation du type $y = mx + b$. On va donc calculer m puis b, à partir des formules trouvées en fin de démonstration.

1) On calcule m :

$$m = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_x^2} = \frac{1{,}92}{2{,}09^2} = 0{,}44$$

2) On calcule b :

$$b = y - mx$$

On sait que la droite passe par le point (4 ; 0), on peut donc remplacer x par 4 et y par 0.

$$b = 0 - 0{,}44 \times 4 = -1{,}76$$

L'équation de la droite est donc $\boldsymbol{y = 0{,}44x - 1{,}76}$**.** On en conclut que le temps de sommeil par nuit augmente linéairement avec le temps de sport quotidien.

Corrélation et causalité

I. Corrélation et causalité

Exercice 6

Si on résume le texte, on peut faire le schéma suivant :

Dormir 10 heures → Travail efficace → Temps pour le sport

A gauche des flèches se trouvent les causes, et à droite les conséquences

A. VRAI
B. FAUX : Comme montré sur le schéma, le sport est la conséquence du travail efficace
C. VRAI
D. VRAI : Ces trois variables sont liées les unes aux autres, on peut donc dire qu'elles sont corrélées