TUTORAT SANTE STRASBOURG

Cahier de remise à niveau
PREMIERE ET TERMINALE

Mathématiques

SOMMAIRE

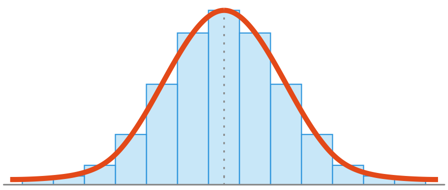
PRÉAMBULE

Dans ce cahier de remise à niveau, tu trouveras deux parties : une partie sur les notions enseignées en première et une partie sur les notions de terminale. Chaque cours est composé de vidéos explicatives, d'un texte explicatif ainsi que d'exercices corrigés *(réalisés par tes tuteurs.trices)* qui te permettront de t'exercer et de voir si tu as compris les notions abordées dans le cours.

N'oublie pas que si tu ne comprends pas directement certaines notions c'est normal : c'est en s'entraînant que tout deviendra plus clair.

Nous espérons que ce cahier te sera utile. Bon courage !

L'équipe du tutorat



MATHÉMATIQUES

REMISE À NIVEAU

PREMIÈRE

SECOND DEGRÉ

Cours et exercices

L'ensemble des courbes ont été réalisées sur Geogebra.

I. Fonction polynôme du 2nd degré

https://www.youtube.com/watch?v=Slh5PcEnwHU

1. Définition

On appelle **fonction polynôme du second degré** (ou fonction trinôme du second degré) une fonction qui peut s'exprimer, pour tout x, sous la forme :

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c} \quad \text{avec } a \neq 0 \text{ et } b \text{ et } c \in \mathbb{R}$$

(c'est-à-dire que b et c peuvent prendre toutes les valeurs réelles, tant positives que négatives)

Remarque : par comparaison, une **fonction du premier degré** correspond à une **fonction affine** qui peut s'exprimer, pour tout x, sous la forme :

$$\boxed{\boldsymbol{f(x) = ax + b}}$$

1. Forme canonique

Toute fonction trinôme du 2nd degré (cf. 1.), peut également être écrite, pour tout x réel sous la forme :

$$\boxed{\boldsymbol{f(x) = a\,(x - \alpha)^2 + \beta}} \quad \text{avec } a \neq 0,\ \alpha = \frac{-b}{2a} \text{ et } f(\alpha) = \beta$$

C'est la **forme canonique** de la fonction trinôme du 2nd degré

→ Cette formulation, bien qu'elle puisse paraître compliquée, nous sera utile par la suite pour déterminer le sens de variation et le maximum/minimum de la représentation graphique du polynôme du 2nd degré.

2. Courbe représentative de la fonction polynôme du 2nd degré

Comme vu plus haut, la fonction polynôme du 2nd degré peut s'exprimer sous 2 formes :

- La forme classique : $f(x) = ax^2 + bx + c$
- La forme canonique : $f(x) = a\,(x - \alpha)^2 + \beta$

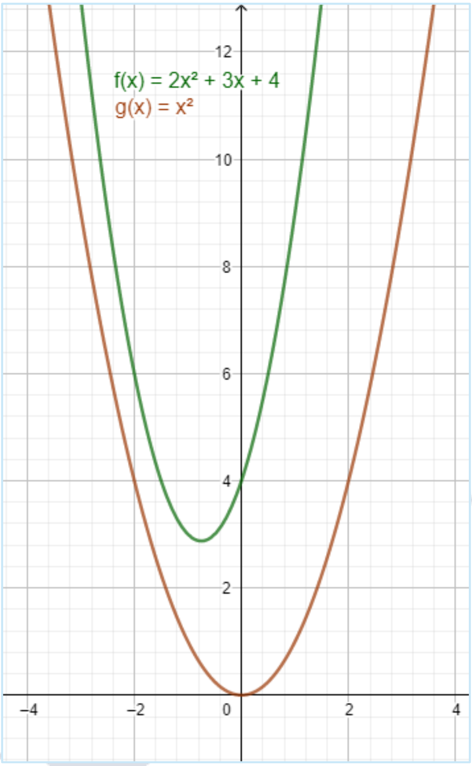
Pour les 2 formes, on peut remarquer que la **fonction polynôme du 2nd degré dérive de la fonction carrée $\boldsymbol{f(x) = x^2}$**, représentée graphiquement par une parabole.

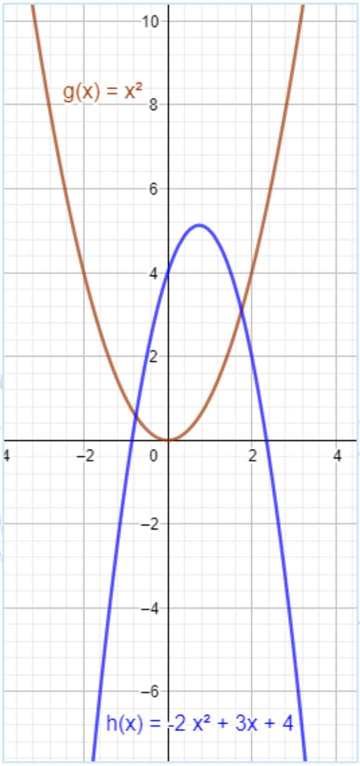
C'est d'autant plus vrai que l'on peut approximer la forme canonique à $f(x) = a.X^2 + \beta$ (avec $X = x - \alpha$).

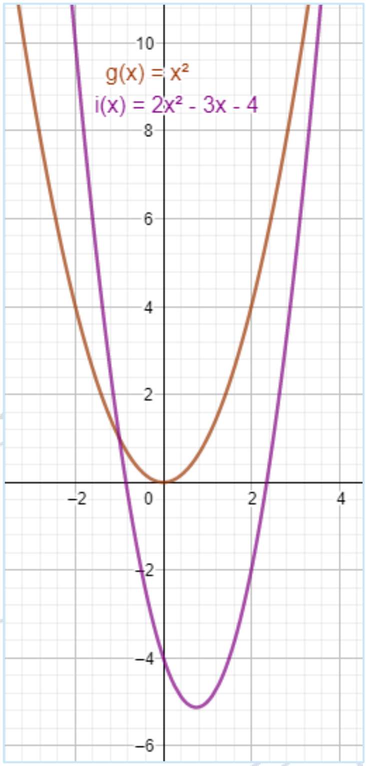
Donc la **représentation graphique de la fonction polynôme du 2nd degré** est une **parabole ayant pour équation : $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$**

Exemples :

3. Sens de variation de la fonction du second degré







Le **sens de variation** de la parabole dépend de la valeur de **a,** qui peut prendre des valeurs positives ou négatives (il ne doit juste pas être nul).

Pour $\boldsymbol{a > 0}$: la courbe est décroissante, atteint son minimum ($x_{\min}$), puis est croissante.
Pour $\boldsymbol{a < 0}$: la courbe est croissante, atteint son maximum (x_{max}), puis est décroissante.

Moyen mnémotechnique pour le sens de variation :
- La courbe sourit quand a est positif 🙂
- La courbe n'est pas contente quand a est négatif ☹

Le sommet de la parabole représentative de la fonction trinôme du 2nd degré atteint donc un sommet puis change de sens de variation.

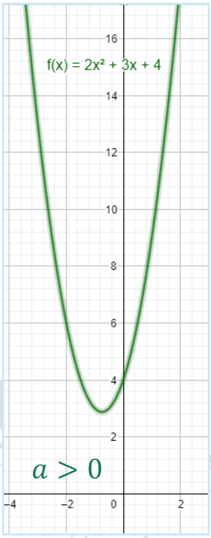
Le **sommet** de la fonction trinôme du 2nd degré a pour **coordonnées** $(\boldsymbol{\alpha}\,;\,\boldsymbol{\beta})$, soit pour abscisse $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et pour ordonnée $\beta = f(\alpha)$.

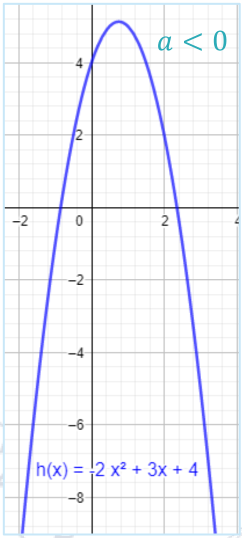
Rappel : α et β proviennent de la forme canonique de la fonction trinôme du 2nd degré :

$$\boldsymbol{f(x) = a\,(x-\alpha)^2 + \beta}$$

On peut exprimer ceci dans des tableaux de variation :

$a > 0$			
x	$-\infty$	α	$+\infty$
$y = f(x)$	↘	β	↗





$a < 0$			
x	$-\infty$	α	$+\infty$
$y = f(x)$	↗	β	↘

II. Équation du 2nd degré

1. Définition

On appelle **équation du 2nd degré**, l'équation dérivée de l'expression du trinôme du 2nd degré qui suit la forme :

$$\boxed{\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}} \text{ avec } a \neq 0 \text{ et } b \ et \ c \ \in \mathbb{R}$$

4. Discriminant du polynôme et solutions d'une équation du 2nd degré

Les Bons Profs : https://www.youtube.com/watch?v=tTdHlpFERVQ

Le **discriminant** $\boldsymbol{\Delta}$ de la fonction trinôme du 2nd degré est le nombre réel tel que :

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4.a.c}}$$

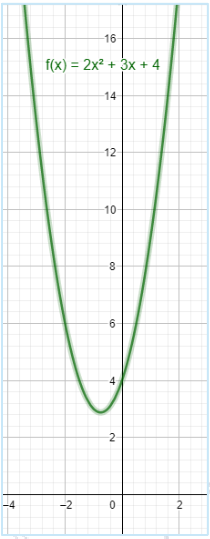
Remarque : ce nombre va nous permettre de définir les solutions de l'équation du 2nd degré, soit les abscisses pour lesquelles la courbe représentative de la fonction coupe l'axe des abscisses (= axe x) ou autrement dit les abscisses x qui vérifient l'équation $y = 0$.

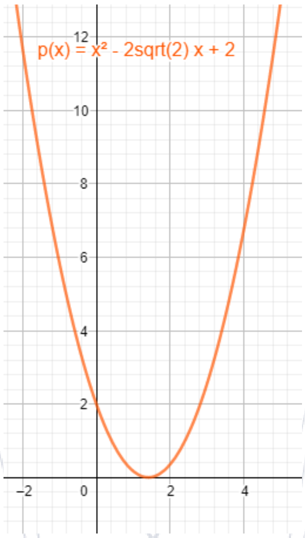
On peut trouver les **solutions** suivantes, **en fonction de** $\boldsymbol{\Delta}$:

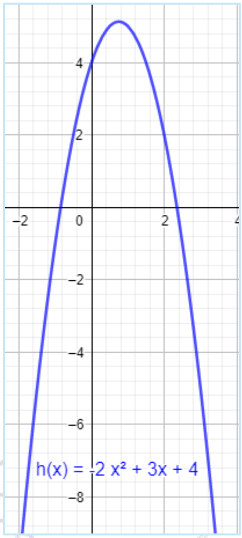
$\boldsymbol{\Delta < 0}$	$\boldsymbol{\Delta = 0}$	$\boldsymbol{\Delta > 0}$
0 solution	1 solution	2 solutions
$\emptyset$	$\boldsymbol{x_0 = \frac{-b}{2a} = \alpha}$	$\boldsymbol{x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}} \quad et \quad \boldsymbol{x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}$

Remarque : x_0, x_1 et x_2 sont appelées les **racines** du polynôme du 2nd degré.

Exemples :







$$2x^2+3x+4=0$$
$$\Longrightarrow \Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times 4$$
$$= -23 < 0$$
$\Longrightarrow$ 0 solutions

$$x^2 - 2\sqrt{2}\,.x + 2 = 0$$
$$\Longrightarrow \Delta = (-2\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times 2$$
$$= 0$$
$\Longrightarrow$ 1 solution :
$$x_0 = \frac{-(-2\sqrt{2})}{2\times 1} \approx 1{,}41$$

$$-2x^2+3x+4=0$$
$$\Longrightarrow \Delta = 3^2 - 4 \times (-2) \times 4$$
$$= 41 < 0$$
$\Longrightarrow$ 2 solutions :
$$x_1 = \frac{-3-\sqrt{41}}{2\times(-2)} \approx 2{,}35$$
$$x_2 = \frac{-3+\sqrt{41}}{2\times(-2)} \approx -0{,}85$$

5. Signe de la fonction polynôme du 2nd degré : https://www.youtube.com/watch?v=CyHpnon4_M4

Le signe de la fonction du trinôme du 2nd degré est lié au signe de a et au signe du discriminant **Δ**.

- Si **$\Delta < 0$**, la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses donc la fonction est du **signe de a sur tous l'intervalle** $]-\infty\,;\,+\infty[$. Il n'y a donc pas de racines.
- Si **$\Delta = 0$**, la fonction **s'annule pour $x_0 = \frac{-b}{2a}$** sinon elle est du signe de a.
- Si **$\Delta > 0$**, la parabole coupe 2 fois l'axe des abscisses pour $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et la fonction est du **signe de a en dehors des racines** (soit sur les intervalles $]-\infty\,;\,x_{1\ ou\ 2}]\ et\ [x_{1\ ou\ 2}\,;\,+\infty[$).

On peut résumer cela avec des tableaux de signes :

$\Delta = 0$			
x	$-\infty$	$x_0 = \frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	0	Signe de a

$\Delta < 0$		
x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	

	$\Delta > 0$				
x	$-\infty$	$x_1 ou\ x_2$		$x_1 ou\ x_2$	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	0	Signe opposé de a	0	Signe de a

III. Exercices

Exercice 1 :

Exprimez les fonctions du 2nd degré qui suivent sous leur forme canonique

1) $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$
2) $g(x) = -3x^2 + 12x - 6$
3) $h(x) = x^2 + 4$

Exercice 2 :

Exprimer les fonctions du 2nd degré qui suivent sous leur forme classique :

1) $i(x) = 2(x-4)^2 + 12$
2) $j(x) = -5(x-7)^2 + 2$
3) $k(x) = 4(x+9) - 1$

Exercice 3 :

Ecrire les tableaux de variation et de signe des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$
2) $g(x) = -2(x-4)^2 + 5$

Exercice 4 :

Résoudre les équations du 2nd degré suivantes :

1) $6x^2 + 5x + 4 = 0$
2) $2x^2 + 8x + 8 = 0$

Correction des exercices

Exercice 1 :

La manière la plus simple de résoudre ce type de questions consiste à réutiliser les formules des parties I. 1.& 2. :

On avait pour la forme classique la fonction du 2nd degré la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ et pour la forme canonique on avait : $f(x) = a\,(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $f(\alpha) = \beta$.

Le coefficient a est le même dans les 2 formes donc pas besoin de le calculer. Concernant α et β, on connait leurs formules littérales donc on peut les calculer. Une fois toutes les valeurs obtenues il ne reste plus qu'à écrire la forme canonique.

1) $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$

Pour cette fonction, on peut identifier par analogie avec la formule que : $a = 2$, $b = 3$, et $c = 4$.

On peut donc calculer α :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2 \times 2} = \frac{-3}{4} = \mathbf{-0,75}$$

Une fois que l'on a calculé α, on peut maintenant calculer β :

$$\beta = f(\alpha) = 2\alpha^2 + 3\alpha + 4$$
$$= 2 \times (-0{,}75)^2 + 3 \times (-0{,}75) + 4$$
$$= \frac{23}{8} = \mathbf{2,875}$$

On peut donc maintenant accéder à la forme canonique de la fonction $f(x)$:

$$f(x) = 2\big(x - (-0{,}75)\big)^2 + 2{,}875 = \mathbf{2(x + 0,75)^2 + 2,875}$$

2) $g(x) = -3x^2 + 12x - 6$

On précède de la même façon que pour la 1ère question :

$a = -3$, $b = 12$, et $c = 6$.

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2 \times (-3)} = \frac{12}{6} = \mathbf{2}$$

$$\beta = g(\alpha) = -3\alpha^2 + 12\alpha - 6$$
$$= -3 \times (2)^2 + 12 \times 2 - 6$$
$$= \mathbf{6}$$

Conclusion : $g(x) = -3(x - 2)^2 + 6$

3) $h(x) = x^2 + 4$

On précède de la même façon que pour la 1ère question :

$a = 1$, $b = 0$, et $c = 4$.

Remarque : Dans l'expression de la forme classique de la fonction du 2nd degré un des termes peut être égal à 0 excepté a (sinon cela donnerait simplement une fonction affine de forme $f(x) = ax + b$)

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2 \times (1)} = \mathbf{0}$$

$$\beta = g(0) = \alpha^2 + 4$$
$$= 0^2 + 4$$
$$= \mathbf{4}$$

Conclusion : $h(x) = -1(x-0)^2 + 4 = -x^2 + 4$

Remarque : pour cette dernière question on peut remarquer que la forme canonique de la fonction $h(x)$ est la même que la forme classique.

Exercice 2 :

Pour résoudre cet exercice, on va réutiliser les formules du cours vues dans les parties I. 1.& 2. :

On avait pour la forme classique la fonction du 2nd degré la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ et pour la forme canonique on avait : $f(x) = a\,(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $f(\alpha) = \beta$.

Le coefficient a est le même dans les 2 formes donc pas besoin de le calculer. Concernant b et c, on peut les calculer à partir de la forme canonique. Une fois toutes les valeurs obtenues il ne reste plus qu'à écrire la forme classique.

1) $i(x) = 2(x-4)^2 + 12$

Pour cette fonction, on peut identifier par analogie avec la formule que : $a = 2,\ \alpha = 4,\ \beta = 12$

A partir de la formule de α, on peut calculer b étant donné que l'on connaît a :

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{-b}{2a}$$
$$\Leftrightarrow -b = \boldsymbol{\alpha} \times 2a$$
$$\Leftrightarrow b = \frac{\boldsymbol{\alpha} \times 2a}{-1} = \frac{4 \times 2 \times 2}{-1} = \mathbf{-16}$$

On connaît $a, b, \boldsymbol{\alpha}\ et\ \beta$ donc on peut maintenant calculer c :

$$i(\boldsymbol{\alpha}) = \beta$$
$$\Leftrightarrow i(\boldsymbol{\alpha}) = a \times \boldsymbol{\alpha}^2 + b\boldsymbol{\alpha} + c = \beta$$
$$\Leftrightarrow c = \beta - b\boldsymbol{\alpha} - a \times \boldsymbol{\alpha}^2$$
$$= 12 - (-16) \times 4 - 2 \times (4)^2 = \mathbf{44}$$

On peut donc maintenant accéder à la forme classique de la fonction $i(x)$:

$$i(x) = 2x^2 - 16x + 44$$

2) $j(x) = -5(x-7)^2 + 2$

On précède de la même façon que pour la 1ère question :

$a = -5,\ \boldsymbol{\alpha} = 7,\ \beta = 2$

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{-b}{2a}$$
$$\Leftrightarrow -b = \boldsymbol{\alpha} \times 2a$$
$$\Leftrightarrow b = \frac{\boldsymbol{\alpha} \times 2a}{-1} = \frac{7 \times 2 \times (-5)}{-1} = \mathbf{70}$$
$$j(\boldsymbol{\alpha}) = \beta$$
$$\Leftrightarrow j(\boldsymbol{\alpha}) = a \times \boldsymbol{\alpha}^2 + b\boldsymbol{\alpha} + c = \beta$$

$$\Leftrightarrow c = \beta - b\boldsymbol{\alpha} - a \times \boldsymbol{\alpha}^2$$
$$= 2 - 70 \times 7 - (-5) \times 7^2 = \mathbf{-243}$$

Conclusion : $j(x) = -5x^2 + 70x - 243$

3) $k(x) = 4(x+9) - 1$

On précède de la même façon que pour la 1ère question :

$a = 4,\ \boldsymbol{\alpha} = -9,\ \beta = -1$

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{-b}{2a}$$
$$\Leftrightarrow -b = \boldsymbol{\alpha} \times 2a$$
$$\Leftrightarrow b = \frac{\boldsymbol{\alpha} \times 2a}{-1} = \frac{(-9) \times 2 \times 4}{-1} = \mathbf{72}$$

$$k(\boldsymbol{\alpha}) = \beta$$
$$\Leftrightarrow k(\boldsymbol{\alpha}) = a \times \boldsymbol{\alpha}^2 + b\boldsymbol{\alpha} + c = \beta$$
$$\Leftrightarrow c = \beta - b\boldsymbol{\alpha} - a \times \boldsymbol{\alpha}^2$$
$$= (-1) - 72 \times (-9) - 4 \times (-9)^2 = \mathbf{323}$$

Conclusion : $k(x) = 4x^2 + 72x + 323$

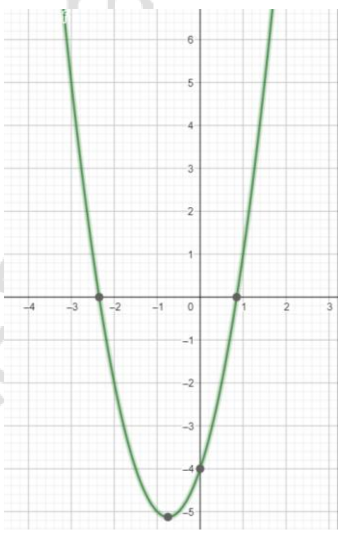
Exercice 3 :

1) $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$

Cette fonction est sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$

$a = 2 > 0$, donc cette fonction est décroissante atteint un minimum aux coordonnées $(\alpha; \beta)$ puis est de nouveau croissante.

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2 \times 2} = -\frac{3}{4} = \mathbf{-0,75}$$



$$\beta = f(\alpha) = 2\alpha^2 + 3\alpha - 4$$
$$= 2 \times (-0{,}75)^2 + 3 \times (-0{,}75) - 4$$
$$= \frac{-41}{8} = \mathbf{-5.125}$$

$a > 0$			
x	$-\infty$	$-0{,}75$	$+\infty$
$y = 2x^2 + 3x - 4$	↘	-5.152	↗

Pour le tableau de signe on a besoin de calculer le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$:

D'après la formule : $a = 2$, $= 3$, $c = -4$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= 3^2 - 4 \times 2 \times (-4)$$
$$= 41 > 0$$

$\Delta > 0$ donc il y a 2 racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{41}}{2 \times 2} \approx -2{,}35$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{41}}{2 \times 2} \approx 0{,}85$$

$\Delta > 0$ et $a > 0$								
x	$-\infty$		$-2{,}35$		$0{,}85$		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	0	+	

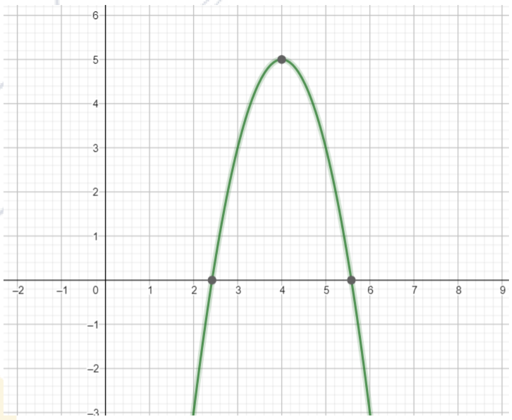
2) $g(x) = -2(x-4)^2 + 5$

Cette fonction est sous la forme canonique $g(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

$a = -2 < 0$, donc cette fonction est croissance atteint un maximum aux coordonnées $(\alpha ; \beta)$ puis est de nouveau décroissante.

D'après la formule, $\alpha = 4$ et $\beta = 5$

$a < 0$			
x	$-\infty$	4	$+\infty$
$y = -2(x-4)^2 + 5$	↗	5	↘



Pour le tableau de signe, on a besoin de trouver la forme classique de la fonction $g(x)$ puis calculer le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$:

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{-b}{2a}$$
$$\Leftrightarrow -b = \boldsymbol{\alpha} \times 2a$$
$$\Leftrightarrow b = \frac{\boldsymbol{\alpha} \times 2a}{-1} = \frac{4 \times 2 \times (-2)}{-1} = \mathbf{16}$$

$$g(\boldsymbol{\alpha}) = \beta$$
$$\Leftrightarrow g(\boldsymbol{\alpha}) = a \times \boldsymbol{\alpha}^2 + b\boldsymbol{\alpha} + c = \beta$$
$$\Leftrightarrow c = \beta - b\boldsymbol{\alpha} - a \times \boldsymbol{\alpha}^2$$
$$= 5 - 16 \times 4 - (-2) \times 4^2 = \mathbf{-27}$$

On a donc $g(x) = -2x^2 + 16x - 27$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= 16^2 - 4 \times (-2) \times (-27)$$
$$= 40 > 0$$

$\Delta > 0$ donc il y a 2 racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16 - \sqrt{40}}{2 \times (-2)} \approx 5{,}58$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16+\sqrt{40}}{2\times(-2)} \approx 2{,}42$$

$\Delta > 0$ et $a > 0$								
x	$-\infty$		2,42		5,58		$+\infty$
$f(x)$		-	0	+	0	-	

Exercice 4 :

Pour répondre à ce genre de question, il faut calculer le discriminant Δ puis appliquer les formules des racines qui sont différentes selon le signe de Δ :

$\boldsymbol{\Delta < 0}$	$\boldsymbol{\Delta = 0}$	$\boldsymbol{\Delta > 0}$
0 solution	1 solution	2 solutions
$\emptyset$	$\boldsymbol{x_0 = \frac{-b}{2a} = \alpha}$	$\boldsymbol{x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$ *et* $\boldsymbol{x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$

1) $6x^2 + 5x + 4 = 0$

$a = 6$, $b = 5$, $c = 4$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= 5^2 - 4\times 6\times 4\\ &= -71 < 0\end{aligned}$$

<u>Conclusion :</u> $\Delta < 0$ donc il n'y a pas de solutions à cette équation.

2) $2x^2 + 8x + 8 = 0$

$a = 2$, $b = 8$, $c = 8$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= 8^2 - 4\times 2\times 8\\ &= 0\end{aligned}$$

$\Delta = 0$ donc il y a 1 solution :

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2\times 2} = \mathbf{-2}$$

<u>Conclusion :</u> La solution de l'équation est $x_0 = -2$.

DÉRIVATIONS

Cours et exercices

I. Avant de commencer

1. Les différentes notations de la dérivée d'une fonction

Notation de Lagrange : f'

Notation de Leibniz : $\frac{df}{dx}$

Notation de Lagrange

La notation f' (qui se lit « f prime ») pour désigner la dérivée de la fonction f est due au mathématicien français Lagrange (1736 - 1813).

Cette notation est la plus usuelle et la plus simple si la fonction étudiée est une fonction d'une seule variable.

Si $y = f(x)$ on peut désigner la dérivée de f par y'. Et si par exemple, $f(x) = 3x^2 + 4x - 5$, on peut écrire que $f'(x) = (3x^2 + 4x - 5)'$

Notation de Leibniz

La notation $\frac{df(x)}{dx}$ pour désigner la dérivée de la fonction f est due au philosophe et mathématicien allemand Leibniz (1646 - 1716). Si $y = f(x)$, Le symbole donne la précision qu'il s'agit de la dérivée par rapport à x. On peut l'appliquer à l'expression de la fonction.

Par exemple, si f est la fonction, qui à tout x réel fait correspondre son carré x^2, la dérivée de f peut s'écrire $\frac{d(x^2)}{dx}$. C'est la notation qu'il faut obligatoirement utiliser si la fonction étudiée est une fonction de plusieurs variables.

Adapté du site Khan Academy

II. Fonctions dérivées de C, de $u + v$, de $u - v$ et de λu

2. Dérivée d'une fonction constante

https://youtu.be/wsGOjHIyT1A

Exercice 1 : Donner les dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{2}{3}$
b) $g(x) = 2\pi$
c) $h(x) = 1000$

3. Dérivée de la fonction kf et de la fonction $f + g$: https://youtu.be/-8igeiRks0A

A savoir avant de visionner la vidéo : La dérivée de x est 1, $x' = 1$.

Exercice 2 :

1) Donner les dérivées des fonctions suivantes :
   a. $F(x) = 2 \times f(x)$
   b. $G(y) = 3 \times (h(y) + g(y))$
2) On donne $f(x) = 5$. Calculer $F'(x)$.

4. Calculer la dérivée d'une fonction affine

https://youtu.be/PZps3a3cpL4

Exercice 3 :

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 3x + 2$
b) $g(x) = 6 - 4x$
c) $h(x) = 10x - 17$

À retenir :

Fonction	Dérivée
$\boldsymbol{u+v}$	$u' + v'$
$\boldsymbol{u-v}$	$u' - v'$
$\boldsymbol{k}$	0
$\boldsymbol{\lambda \times u}$	$\lambda \times u'$
$\boldsymbol{x}$	1

NB : λ et k sont des constantes

5. Utiliser les propriétés des dérivées

https://youtu.be/lnZ8dbUmcr0

Exercice 4 :

Soit $f(x) = 2x + 3,\ g(x) = 7$ et $h(x) = -5f(x) + 9g(x)$

1) Exprimer $h'(x)$ en fonction de x
2) Calculer le nombre dérivé de h aux points d'abscisse 2 et 21.

III. Fonction dérivée d'une fonction puissance

1. Dérivée d'une fonction puissance : https://youtu.be/j0iXM6DHKKo

À retenir :

Fonction	Dérivée
$\boldsymbol{x^n,\ n \neq 0}$	$n \times x^{n-1}$

Exercice 5 :

Donner les dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x) = x^3$
2) $g(x) = x^{\frac{1}{2}}$
3) $h(y) = y^{-2{,}008}$

2. Propriétés des dérivées et dérivée d'une fonction polynôme : https://youtu.be/k6Oe3gzMsi4

Exercice 6 :

Dériver la fonction suivante : $f(x) = 3x^6 - 2x^4 + x^2 - 54$

IV. Fonctions dérivées du produit et du quotient de deux fonctions

1. Dérivée du produit de deux fonctions

https://youtu.be/nWSlhOrR3aY

Exercice 7 :

Calculer la dérivée de la fonction suivante : $f(x) = (0{,}5x^2 - 5)\left(\frac{2}{3}x^3 + 2x + 8\right)$

2. Dérivée du quotient de deux fonctions

https://youtu.be/merDii3GaJc

Exercice 8 :

Calculer la dérivée de la fonction suivante : $f(x) = \frac{-2x^2+9}{4x-6}$

À retenir :

Fonction	Dérivée
$\boldsymbol{u \times v}$	$u' \times v + u \times v'$
$\boldsymbol{\frac{u}{v}}$	$\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$

Correction

Exercice 1 :

Toutes les fonctions sont constantes : leurs dérivées sont donc nulles

a) $f'(x) = 0$
b) $g'(x) = 0$
c) $h'(x) = 0$

Exercice 2 :

1) a. $F'(x) = [2 \times f(x)]' = 2 \times f'(x)$

b. $G'(y) = [3 \times (h(y) + g(y))]'$
$= 3 \times (h(y) + g(y))'$
$= 3 \times (h'(y) + g'(y))$
$= 3h'(y) + 3g'(y)$

2) $f'(x) = 0$ donc $F'(x) = 2 \times f'(x) = 2 \times 0 = 0$

Exercice 3 :

a. $f'(x) = (3x + 2)'$
$= (3x)' + 2'$
$= 3 \times (x') + 0$
$= 3 \times 1 + 0$
$= 3$

b. $g'(x) = (6 - 4x)'$
$= 6' + (-4x)'$
$= 0 - (4x)'$
$= -4 \times (x')$

$= -4 \times 1$
$= -4$

c. $h'(x) = (10x - 17)'$
$= (10x)' - 17'$
$= 10 \times (x') - 0$
$= 10 \times 1$
$= 10$

Exercice 4 :

1) $h'(x) = [-5f(x) + 9g(x)]'$
$= [-5fx)]' + [9g(x)]'$
$= -5 \times f'(x) + 9 \times g'(x)$

Calculons d'abord $f'(x)$:

$f'(x) = (2x + 3)'$

$= (2x)' + 3'$

$= 2 \times (x') + 0$

$= 2 \times 1 + 0$

$= 2$

Puis calculons $g'(x)$:

$g'(x) = 7' = 0$

On a donc : $h'(x) = -5 \times f'(x) + 9 \times g'(x) = -5 \times 2 + 0 = \mathbf{-10}$

2) Le nombre dérivé de h aux points d'abscisse 2 et 21 vaut donc : $h'(2) = -10$ et $h'(21) = -10$

Exercice 5 :

1) $f'(x) = (x^3)'$
$= 3 \times x^{3-1}$
$= 3 \times x^2$

2) $g'(x) = (x^{\frac{1}{2}})'$
$= \frac{1}{2} \times x^{\frac{1}{2}-1}$
$= \frac{1}{2} \times x^{-\frac{1}{2}}$
$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Rappel : $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ et $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

3) $h'(y) = (y^{-2,008})'$
$= -2,008 \times y^{-2,008-1}$
$= -2,008 \times y^{-3,008}$

Exercice 6 :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3x^6 - 2x^4 + x^2 - 54)' \\ &= (3x^6)' - (2x^4)' + (x^2)' - 54' \\ &= 3 \times (x^6)' - 2 \times (x^4)' + (x^2)' - 54' \\ &= 3 \times (6 \times x^{6-1}) - 2 \times (4 \times x^{4-1}) + 2 \times x^{2-1} - 0 \\ &= 3 \times (6 \times x^5) - 2 \times (4 \times x^3) + 2 \times x - 0 \\ &= 18x^5 - 8x^3 + 2x \end{aligned}$$

Exercice 7 :

$$f'^{(x)} = [(0{,}5x^2 - 5)\left(\frac{2}{3}x^3 + 2x + 8\right)]'$$

On définit les fonctions suivantes :

$u(x) = 0{,}5x^2 - 5$ et $v(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x + 8$

$$u'(x) = 0{,}5 \times 2 \times x = x$$

$$v'(x) = \frac{2}{3} \times 3 \times x^2 + 2 = 2x^2 + 2$$

Ainsi on a : $f'(x) = \boldsymbol{u'} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v'}$

$$\begin{aligned} &= x \times \left(\frac{2}{3}x^3 + 2x + 8\right) + (0{,}5x^2 - 5)(2x^2 + 2) \\ &= \frac{2}{3}x^4 + 2x^2 + 8x + x^4 + x^2 - 10x^2 - 10 \\ &= \frac{5}{3}x^4 - 7x^2 + 8x - 10 \end{aligned}$$

3. Dérivée du quotient de deux fonctions

Exercice 8 :

$$f'(x) = \left(\frac{-2x^2 + 9}{4x - 6}\right)'$$

On définit les fonctions suivantes :

$u(x) = -2x^2 + 9$ et $v(x) = 4x - 6$

$$u'(x) = -2 \times 2x = -4x$$

$$v'(x) = 4$$

Ainsi, on a :

$$f'(x) = \frac{\boldsymbol{u'} \times \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v'}}{\boldsymbol{v^2}}$$

$$= \frac{-4x \times (4x - 6) - (-2x^2 + 9) \times 4}{(4x - 6)^2}$$

$$\frac{-16x^2 + 24x - (-8x^2 + 36)}{(4x - 6)^2}$$

$$= \frac{-16x^2 + 24x + 8x^2 - 36}{(4x - 6)^2}$$

$$= \frac{-8x^2 + 24x - 36}{(4x - 6)^2}$$

FONCTIONS EXPONENTIELLES ET LOGARITHME

Cours et exercices

I. Fonction exponentielle

1. Qu'est-ce qu'une fonction exponentielle ?

https://youtu.be/pBeGfLoId4I

Permet de décrire une quantité qui augmente très rapidement et de plus en plus vite (dans le langage courant, on parle de "croissance exponentielle").

Pour montrer cela, on va partir d'un exemple :
Imaginons la fonction $f(x) = 3^x$ (attention, ne pas confondre avec $f(x) = x^3$!! Dans notre cas, c'est bien l'exposant qui change !) On peut répartir les valeurs dans un tableau :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
F(x)	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27	81	243

Explications :

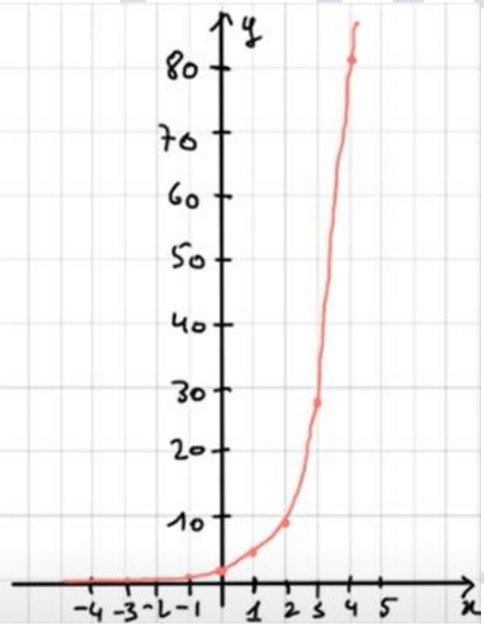
On sait que : $3^{-x} = \frac{1}{3^x}$, ainsi : $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$

De même : $3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$; $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ et $3^{-1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$

Tout nombre à la puissance 0 vaut 1, ainsi : $3^0 = 1$

Remarque : on constate qu'à chaque fois que la valeur x augmente d'une unité, f(x) est multiplié par 3 😉

La courbe représentative de cette fonction ressemble à cela :



Exercice 1 :

Une bronche principale se divise en 2 ramifications à chaque niveau.

Combien de ramifications possèdera-t-elle à l'étage 11 ?

2. Fonctions affines et fonctions exponentielles

https://youtu.be/cvUMBw5YJpc

- Une fonction affine correspond à une augmentation d'une valeur fixe au cours du temps (par exemple : prendre 1 kg par jour).
  Imaginons qu'un bébé pèse 4 kg à la naissance et qu'il prend 1 kg par jour (dans la vraie vie, ce n'est pas le cas, c'est juste pour illustrer 😉), on peut modéliser cette évolution en écrivant : $f(t) = 4 + t$ (ici, t représente le nombre de jours). Par conséquent, au jour 1, le bébé pèsera 5 kg, au jour 2 : 6 kg etc...

- Une fonction exponentielle correspond à une augmentation ou une diminution par un pourcentage ou un coefficient multiplicateur (par exemple : la population de bactéries sur un milieu de culture augmente de 5% toutes les heures ou alors chaque année le nombre d'espèces d'animaux dans un pays est multiplié par 2).
  Imaginons qu'on a une population de 100 bactéries sur notre milieu de culture à t = 0, au bout d'une heure, le nombre de bactéries sera égal à 105 car on sait que cette population de bactéries est augmentée de 5% toutes les heures. Cette situation peut être modélisée par la fonction : $f(t) = 100 \times 1{,}05^t$(avec t, le nombre d'heures). **Cependant attention, une augmentation de 5% revient à multiplier par 1,05 mais une diminution de 5% revient à multiplier par 0,95 !!!**
  Dans un second cas, imaginons que nous avons 100 espèces différentes d'animaux dans un pays, on nous dit que ce nombre est doublé chaque année, ce qui veut dire qu'au bout de 2 ans, nous aurons 200 espèces d'animaux dans ce pays, on peut donc écrire : $f(t) = 100 \times 2t$

Exercice 2 :

Pour chacune des fonctions suivantes, dire si elle est linéaire ou exponentielle :

a) Chaque année, la valeur du téléphone de Jean diminue de 50€.
b) Tous les 10 ans, la paie de Marie augmente de 5%.
c) La valeur de ce vase rare et ancien double tous les 10 ans.

II. Fonction Logarithme de base B

1. Les propriétés du logarithme

a. Partie 1

https://youtu.be/-Fq4f05NcnI

- Dans un premier temps, on admet la relation : $B^c = a \leftrightarrow \log_B a = c$
  On constate que cela revient à chercher par quel exposant élever B pour obtenir a.
- Dans un second temps, on admet : $\log_B a + \log_B c = \log_B(a \times c)$ (cela peut être démontré mathématiquement, mais cela ne sera pas nécessaire ici).
- Enfin, on admet : $\log_B a - \log_B c = \log_B \left(\frac{a}{c}\right)$(tout pareil, cela peut être démontré mais ce n'est pas utile ici).
  ATTENTION : Dans les deux dernières relations, les logarithmes doivent toujours être de la même base (B) !!!! Sinon, les relations ne s'appliquent pas !!!

- Exemples :
  - On peut dire que : $\log_2 8 + \log_2 32 = \log_2 256$ car : $\log_2 8 = 3$ *et* $\log_2 32 = 5$; de plus : (5+3 =8) et $2^8 = 256$
    On a donc : $\log_2 8 + \log_2 32 = \log_2(8 \times 32) = \log_2 256$ car : $2^3 \times 2^5 = 2^{3+5} = 2^8 = 256$

- On peut dire que : $\log_3\left(\frac{1}{9}\right) - \log_3 81 = \log\left(\frac{1}{729}\right)$

  Car : $\log_3\left(\frac{1}{9}\right) = -2\ et\ \log_3 81\ = 4$, donc : $-2\ - 4 = -6$;

  De plus : $3^2\ = 9\ et\ 3^{-2}\ = \frac{1}{9}$ et $3^4\ = 81$

  Enfin : $3^6\ = 729\ et\ 3^{-6}\ = \frac{1}{729}$

Exercice 3 :

Donner la définition d'un logarithme de base B de a ($log_B(a)$).

Exercice 4 :

Quelles sont les deux propositions exactes concernant les propriétés du logarithme ?

A. $log_B(3) +\ log_B(4) =\ log_B(12)$

B. $log_B(3) +\ log_B(4) =\ log_B(7)$

C. $log_B(4) -\ log_B(3) =\ log_B(1)$

D. $log_B(4) -\ log_B(3) =\ log_B(\frac{4}{3})$

E. Autre réponse

b. Partie 2

https://youtu.be/AZSK-VnEcL0

- On admet en premier lieu que : $A \log_B C\ \ = \log_B C^A$
- Ensuite : $\log_B A\ \ = \ \frac{\log_C A}{\log_C B}$
- Exemples : $3 \log_2 8 = \log_2 8^3$car : $\log_2 8\ \ = 3\ et\ 3 \times 3 = 9$ et $8^3\ = 512$
  De plus : $8^3\ = (2^3)^3\ = 2^9$donc : $\log_2 8^3\ = 9$
  On a ensuite : $\log_{17} 357 = \frac{\log_{10} 357}{\log_{10} 17} = 2{,}075$: surtout utile sur la calculatrice, car on a souvent uniquement présence de 2 touches : log (qui correspond à un logarithme de base 10) et ln (logarithme népérien, qui correspond à un logarithme de base e → nombre d'Euler ≈ 2,71), ainsi la deuxième égalité peut être vérifiée sur la calculatrice.
- Autre exemple qui peut être pratique pour résoudre des calculs mathématiques :

  $\log_2 \sqrt{\frac{32}{\sqrt{8}}} = \log_2\left(\left(\frac{32}{\sqrt{8}}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$Car la racine carrée revient à élever à la puissance ½.

  Par la propriété vue juste avant : on a : $\log_2\left(\left(\frac{32}{\sqrt{8}}\right)\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{32}{\sqrt{8}}\right)$

  Par la propriété vue dans le point précédent, on peut écrire : $\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{32}{\sqrt{8}}\right) = \frac{1}{2}(\log_2 32 - \log_2 \sqrt{8})$

  Cela peut se simplifier en écrivant : $\frac{1}{2}(\log_2 32 - \log_2 \sqrt{8}) = \frac{5}{2} - \frac{1}{4}\log_2 8$ car : $\log_2 32\ = 5\ et\ \log_2 \sqrt{8} = \log_2 8^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_2 8$

  Cela est égal à : $\frac{5}{2} - \frac{3}{4} = \frac{10}{4} - \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$car $\log_2 8 = 3$

Exercice 5 :

Quelles sont les deux propositions exactes concernant les propriétés du logarithme ?

A. $4 \times log_B(3) =\ log_B(81)$

B. $4 \times log_B(3) =\ log_B(64)$

C. $log_3(4) =\ 1{,}262$ (arrondi à 0,001)

D. $log_3(4) =\ 0{,}794$ (arrondi à 0,001)

Exercice 6 :

Calculer <u>sans</u> calculatrice le logarithme suivant : $log_2((\frac{8}{\sqrt{32}} \times 2)^2)$

(À la fin, il faut obtenir un nombre entier)

2. Représentation graphique d'une fonction logarithme : https://youtu.be/NtmSQMrb_d0

Pour ce faire, il suffit de trouver les antécédents et les images de la fonction logarithme concernée, dans notre cas, on va partir de la fonction : $y = \log_2(x)$, on rappelle que cela revient à écrire : $2^y = x$

On a donc :

x	1/4	1/2	0	2	4	8
y	-2	-1	0	1	2	3

Ensuite, il suffit de chercher les images de la fonction symétrique, ici : $f(x) = -\log_2(x)$, ce qui nous donne:

x	1/4	1/2	0	1	2	3
y	2	1	0	-1	-2	-3

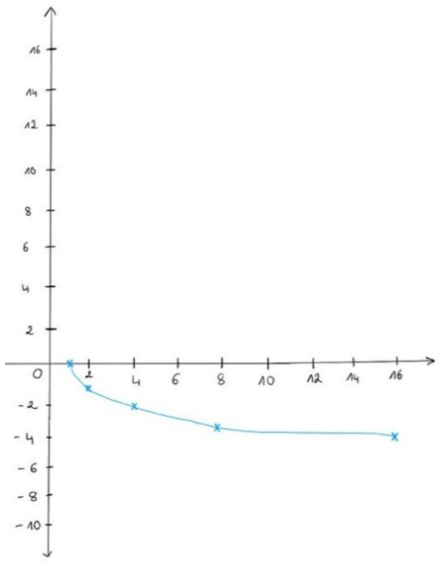
On peut ensuite tracer ces deux courbes : (la courbe bleue représente la fonction logarithmique recherchée) :

Ensuite, il suffit de regarder les déplacements qui ont été faits, s'ils sont symétriques par rapport à un axe (x ou y) ou alors décalés vers la droite ou vers la gauche. Dans ce cas, on peut voir que la courbe est symétrique de deux unités vers la gauche sur l'axe des x (translation).

De plus on peut observer une asymptote en x = -2 (toujours regarder où se trouve l'asymptote pour trouver notre équation de courbe), ce qui veut dire que l'équation de notre courbe est : $f(x) = -\log_2(x+2)$ (car –2 +2 = 0)

Exercice 7 :

Quelle est l'équation de la fonction suivante ?



A. $y = log_2(x)$
B. $y = log_2(x-1)$
C. $y = log_2(-x)$
D. $y = -log_2(x)$
E. Autre réponse

III. Fonction logarithme népérien

1. Calculer un logarithme népérien à la calculatrice

https://youtu.be/1uZmUaDr-Zw

On a déjà vu précédemment que la notation ln sur la calculatrice correspondait à un logarithme en base e et e étant environ égal à 2,718....

Donc pour calculer un logarithme népérien à la calculatrice, il suffit d'appuyer sur la touche ln et d'indiquer le nombre où l'on souhaite connaître la valeur du logarithme de base e.

Exercice 8

Calculer, à l'aide de votre calculatrice, la valeur arrondie au 1000ème du logarithme népérien de 48.

2. Asymptote verticale de la fonction ln

https://youtu.be/s6CHLi4Po4c

Pour trouver la valeur de l'asymptote d'une fonction composée par un ln, il faut dans un premier temps trouver la valeur de x pour laquelle f(x) est nulle.

Par exemple, si l'on considère la fonction : f(x) = ln(x – 3). On peut dire que la fonction est nulle si x = 4 car ln(1) = 0

Cette fonction est définie si et seulement si x > 3 (ln n'est jamais négative !). Ainsi f(x) → -∞ si x → 3

Exercice 9

Soit la fonction définie par $y = ln(2x+3)$

a) Pour quelles valeurs de x la fonction est-elle définie ?
b) En déduire en quelle valeur de x la courbe représentative de la fonction possède une asymptote verticale.
c) Trouver la valeur de x pour laquelle la courbe représentative de la fonction traverse l'axe des abscisses.

3. Dérivée de $\boldsymbol{ln(x)}$ et de $\boldsymbol{ln(u(x))}$

Lien du cours : https://fr.khanacademy.org/math/terminale-option-math-complementaires/xd9273d115c91e8d4:fonction-logarithme-neperien/xd9273d115c91e8d4:derivee-de-ln-x-et-de-ln-u-x/a/differentiating-logarithmic-functions-review

Globalement, pour dériver des fonctions logarithmiques, il y a deux formules importantes à connaître :

- $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$
- $\left(\ln\left(u(x)\right)\right)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$ (Dérivée d'une fonction composée)

Exemple : $(\ln(2x^3+1))' = \frac{6x^2}{2x^3+1}$car $u(x) = 2x^3 + 1 \; donc \; u'(x) = 6x^2$

Exercice 10 :

Dériver les fonctions suivantes :

a) $\ln(6)$
b) $\ln(3x^4 + 5)$

IV. Fonction exponentielle et logarithme

1. Fonction exponentielle et logarithme : leur courbe représentative :

Lien des vidéos : https://youtu.be/gxcBi_2BmZ8 et https://youtu.be/xdSysyD7zvU

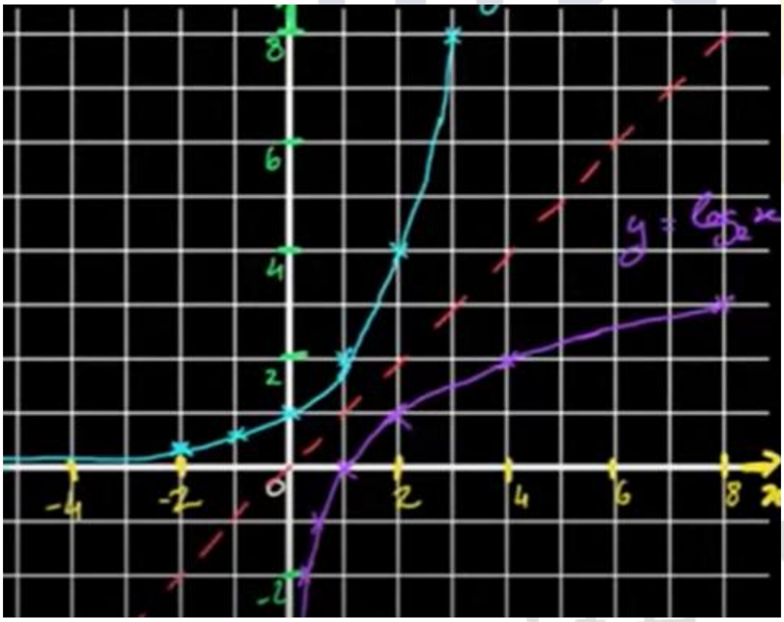
La fonction exponentielle et la fonction logarithme sont deux fonctions dites “réciproques”, ce qui veut dire que leurs antécédents et leurs images sont inversés et que leurs courbes représentatives sont symétriques par rapport à la droite : y = x. Pour illustrer ce propos, prenons un exemple :

Dans un premier temps, on a : $f(x) = 2^x$

x	-2	-1	0	1	2	3
y	1/4	1/2	1	2	4	8

Ensuite, on a : $g(x) = \log_2 \quad x$

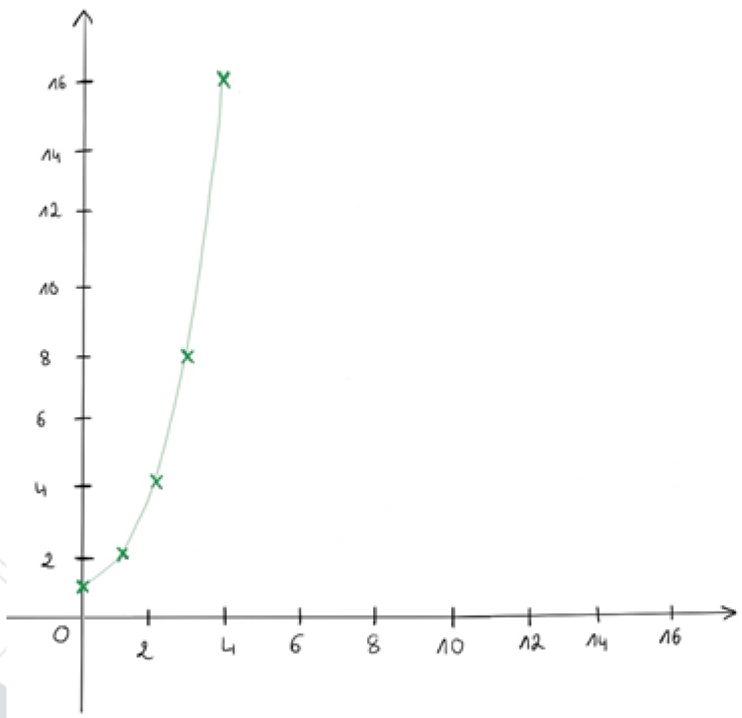
x	1/4	1/2	0	1	2	3
y	-2	-1	0	1	2	3



La courbe bleue représente la fonction : $y = 2^x$; la courbe violette représente la fonction : $y = \log_2 \quad x$ et la courbe rouge représente la fonction : $y = x$; ainsi, on peut voir que les fonctions bleue et violette sont symétriques par rapport à l’axe y = x, ce qui témoigne de leur réciprocité.

Exercice 11 :

Soit la fonction $y = b^x$ tracée ci-dessous :



$y = b^x$

x	y
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16

On donne : $log_b(x) = \frac{log_a(x)}{log_a(b)}$ donc $log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$

a) Trouver la valeur de b
b) Tracer la fonction $y = ln_b(x)$

2. Fonction exponentielle et logarithme : deux tableaux de valeurs : https://youtu.be/Gdjx_hUjV-Y

Cf. Vidéo dont le lien est dans le titre pour voir la méthode de réalisation de ce type d'exercice

Exercice 12 :

Grâce aux deux tableaux ci-dessous uniquement (donc sans utiliser la calculatrice), déterminer la valeur de a, de b, de c et de d.

x	1,262	1,631	1,893	2,096
b^x	4	6	8	10

y	a	3	$4c$	$20d$
$log_b(y)$	0	1,0	1,893	2,096

Correction

Exercice 1 :

À l'étage 11, la bronche aura formé 2^{11} soit 2048 ramifications.

Exercice 2 :

Pour chacune des fonctions suivantes, dire si elle est linéaire ou exponentielle :

1 : affine

2 : exponentielle

3 : exponentielle

Exercice 3 :

Le logarithme de base B de a correspond à la valeur à laquelle il faut élever B pour obtenir a.

Exercice 4 :

Réponse juste : B + D

A. **FAUX** (cf. B)

B. **VRAI** : Car $log_B(A) + log_B(B) = log_B(A \times B)$

C. **FAUX** (cf. D)

D. **VRAI** : Car $log_B(A) - log_B(B) = log_B(\frac{A}{B})$

Exercice 5 :

Réponse juste : A + C

A. **VRAI** : Car $A \times log_B(C) = log_B(C^A)$

Donc ici : $4 \times log_B(3) = log_B(3^4) = log_B(81)$

B. **FAUX** (cf. A)

C. **VRAI** : Car $log_B(A) = \frac{log_C(A)}{log_C(B)}$

Donc ici : $log_3(4) = \frac{ln(4)}{ln(3)} = 1{,}262$ (arrondi à 0,001) ou : $log_3(4) = \frac{log_{10}(4)}{log_{10}(3)} = 1{,}262$ (arrondi à 0,001)

Note : On utilise ici ln ou log_{10} car se sont les 2 logarithmes qui sont disponibles sur notre calculatrice.

D. **FAUX** (cf. C)

Exercice 6 :

$$log_2\left(\left(\frac{8}{\sqrt{32}} \times 2\right)^2\right) = 2log_2\left(\frac{8}{\sqrt{32}} \times 2\right) = 2\left(log_2\left(\frac{8}{\sqrt{32}}\right) + log_2(2)\right)$$

$$= 2\left(log_2(8) - log_2(\sqrt{32})\right) + 1) = 2log_2(8) - 2log_2(\sqrt{32}) + 2$$

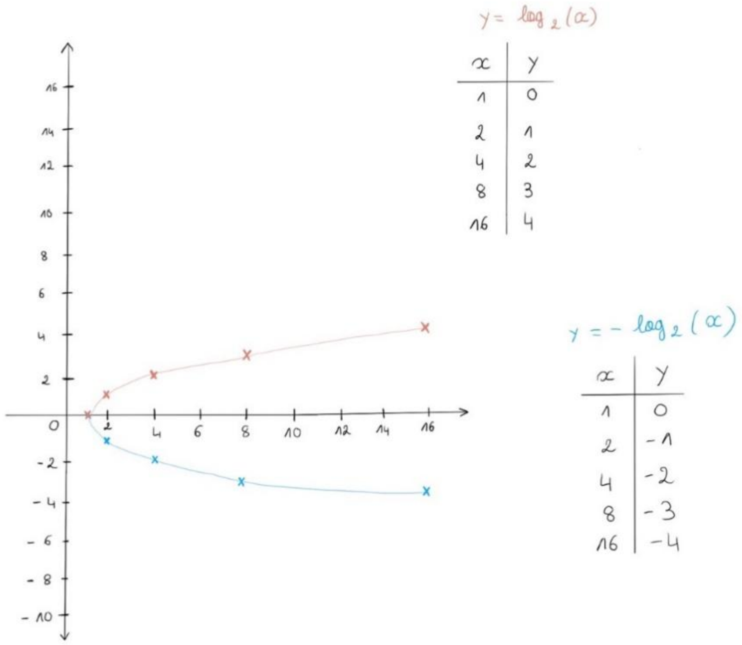
$$= 2log_2(8) - 2log_2(32^{\frac{1}{2}}) + 2 = 2log_2(8) - 2 \times \frac{1}{2}log_2(32) + 2$$

$$= 2 \times 3 - 5 + 2 = 6 - 5 + 2 = \mathbf{3}$$

Exercice 7 :

Réponse juste : D

Car la fonction tracée est symétrique à la fonction $y = log_2(x)$ par rapport à l'axe des abscisses.



Exercice 8 :

$ln(48) = 3{,}871$

Exercice 9 :

a) La fonction est définie si $2x + 3 > 0 \Leftrightarrow 2x > -3 \Leftrightarrow x > -1{,}5$
b) La courbe représentative de la fonction possède une asymptote verticale en $x = 1{,}5$
c) La courbe représentative de la fonction traverse l'axe des abscisses lorsque $y = 0$. On résout donc l'équation : $y = ln(2x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow e^{\ln(2x+3)} = e^0$

$\Leftrightarrow 2x + 3 = 1$

$\Leftrightarrow 2x = -2$

$\Leftrightarrow x = -1$

La courbe représentative de la fonction traverse donc l'axe des abscisses en $x = -1$.

Exercice 10 :

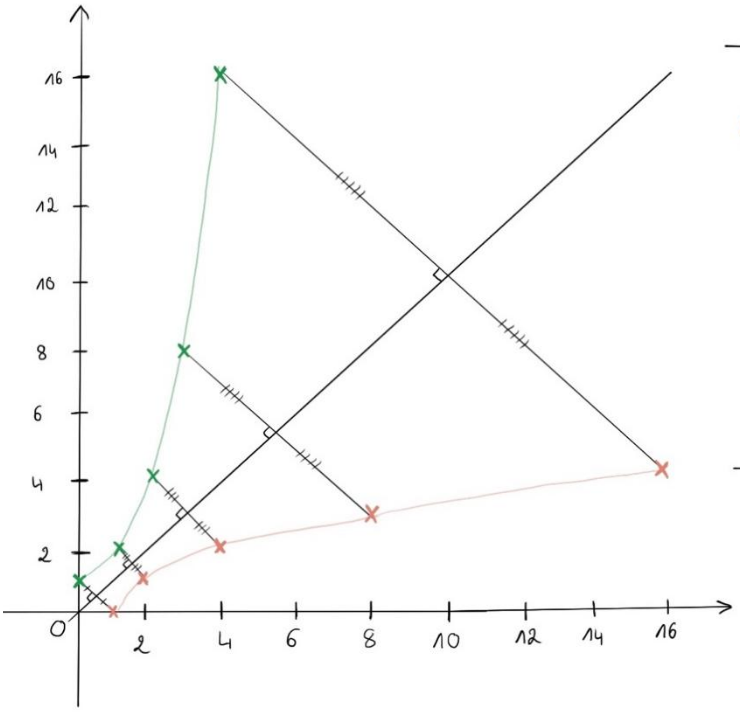
c) $\ln'(6) = \frac{1}{6}$

d) $\ln(3x^4 + 5) = \frac{(3x^4+5)'}{3x^4+5} = \frac{4*3x^3}{3x^4+5} = \frac{12x^3}{3x^4+5} = \frac{12}{3x+5}$

Exercice 11 :

a) Pour $x = 1$ on a $y = 2$ soit $b^1 = 2$ donc $b = 2$

b)



$y = b^x$

x	y
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16

$b^1 = 2 \Leftrightarrow b = 2$

$y = \log_b(x) = \log_2(x)$

x	y
1	0
2	1
4	2
8	3
16	4

→ Exemple de calcul : $\log_2(4) = \dfrac{\ln(4)}{\ln(2)} = 2$

Exercice 12 :

- Détermination de a :

$log_b(a) = 0 \Leftrightarrow b^0 = a$

On a : $b \neq 0$ (sinon, dans le premier tableau, toutes les valeurs de b^x seraient nulles car 0 élevé à n'importe quelle puissance est toujours égal à 0). De plus, on sait qu'un nombre non nul élevé à la puissance 0 donne 1.

Donc $b^0 = \boldsymbol{a} = \mathbf{1}$

- Détermination de b :

$log_b(3) = 1 \Leftrightarrow b^1 = 3 \Leftrightarrow \boldsymbol{b} = \mathbf{3}$

- Détermination de c :

$log_b(4c) = 1{,}893 \Leftrightarrow b^{1{,}893} = 4c$

Dans le premier tableau, on voit que : $b^{1{,}893} = 8$

Donc : $4c = 8 \Leftrightarrow \boldsymbol{c} = \frac{8}{4} = \mathbf{2}$

- Détermination de d :

$log_b(20d) = 2{,}096 \Leftrightarrow b^{2{,}096} = 20d$

Dans le premier tableau, on voit que : $b^{2{,}096} = 10$

Donc : $20d = 10 \Leftrightarrow \boldsymbol{d} = \frac{10}{20} = \mathbf{0{,}5}$

PRODUIT SCALAIRE

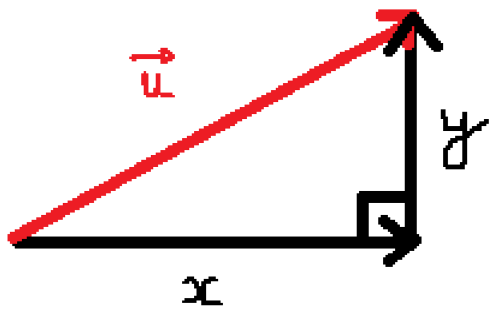
Cours et exercices

I. Introduction

Un vecteur est caractérisé par trois éléments : sa norme (sa longueur), sa direction et son sens. Pour une direction, il y a 2 sens possibles, ex : un vecteur qui est horizontal (direction) peut aller soit vers la droite soit vers la gauche (sens).

Un vecteur peut être décrit en donnant sa composante horizontale x et sa composante verticale y : $\vec{U}$ = (x ,y).

On peut à partir de ces valeurs calculer la norme de ce vecteur en appliquant le théorème de Pythagore : En effet un vecteur, sa composante verticale et horizontale forment toujours un triangle rectangle, donc à partir de 2 valeurs, on peut calculer la 3e



$$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

II. Définitions

Faire le produit scalaire de 2 vecteurs revient en gros à les multiplier, mais comme ce sont des entités en plusieurs dimension (largeur, hauteur et parfois profondeur), on a besoin d'un outil mathématique plus complexe qu'une simple multiplication.

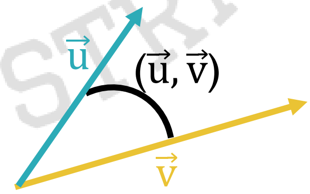
1. Calculs

Il y a deux manières de calculer le produit scalaire :

Soit 2 vecteurs, $\vec{u}$ (x ; y) et $\vec{v}$ (x' ; y'). Les deux vecteurs forment un angle qu'on appelle $(\vec{u},\vec{v})$.

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'}$$

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})}$$



2. Propriété importante

Le produit scalaire de 2 vecteurs orthogonaux (=perpendiculaire mais pour des vecteurs) est nul.

Si $\vec{u} \perp \vec{v}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

3. Principe de bilinéarité et identités remarquables :

Un produit scalaire peut être développé comme si c'était une multiplication :

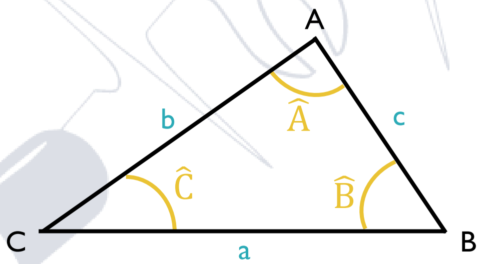
$\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

Les normes de vecteurs se comportent comme n'importe quelle valeur mathématique, on peut donc y appliquer les identités remarquables :

- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
- $\|u\|^2 - \|v\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$

III. Relation d'Al-Kashi

La relation d'Al-Kashi correspond à la généralisation du théorème de Pythagore à tous les triangles.



Petit point d'attention : le segment a est le segment qui est à l'opposé de l'angle A.

C'est un triangle quelconque et non rectangle, on utilise donc la relation d'Al-Kashi au lieu du théorème de Pythagore :

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A})}$$

Cette relation est interchangeable en fonction de quel segment est-ce que l'on veut calculer :

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos(\hat{B})$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\hat{C})$

IV. Exercices :

I. Produit scalaire

Soit 2 vecteurs : $\vec{u}$ (12 ; 3) et $\vec{v}$ (7 ; 9)

Calculez le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$, les 2 vecteurs sont-ils orthogonaux ?

Calculez la norme de chacun des vecteurs

À partir des réponses aux questions précédentes, calculez l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$

CORRECTION :

On applique la formule $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$, on ne peut pas utiliser l'autre formule car on ne connaît pas la valeur de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$

$\vec{u} \cdot \vec{v}$ = 12 x (-3) + 7 x 9

= 27

2 vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul, ce n'est pas le cas ici, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux

$||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{12^2 + 7^2} = 13{,}892$

$||\vec{v}|| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + 9^2} = 8{,}485$

Pour calculer l'angle entre les deux vecteurs, on va utiliser la 2e formule du produit scalaire : $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}||\,||\vec{v}|| \cos(\vec{u}, \vec{v})$

Désormais, la seule inconnue de l'équation est le cosinus de l'angle :

$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{u}||\,||\vec{v}||} = \frac{27}{13{,}892 \times 8{,}485} = 0{,}229$

$(\vec{u}, \vec{v}) = \arccos(\cos(\vec{u}, \vec{v})) = \arccos(0{,}229)$
$= 76{,}761$

*arccos est parfois noté $\cos^{-1}$ sur les calculettes

**Pensez à bien vérifier que votre calculette est réglée en degré et non en radian pour les mesures d'angles

2. Relation d'Al-Kashi :

Soit un triangle quelconque ABC. Le segment a (segment opposé au point A) est parfaitement horizontal et a une longueur de 8, le segment c a lui une longueur de 4. L'angle $\widehat{B}$ vaut 34°

Calculez la longueur du segment b

La composante verticale du vecteur $\overrightarrow{AB}$ vaut 2,237. À partir de là, calculez la composante horizontale du vecteur $\overrightarrow{AC}$.

Correction

1) Application simple de la relation d'Al-Kashi, on a toutes les valeurs nécessaires au calcul :

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos(\widehat{B}) = 4^2 + 8^2 - 2 \times 4 \times 8 \times \cos(34) = 26{,}942$

$b = \sqrt{b^2} = \sqrt{26{,}942} = 5{,}191$

2) Premièrement, ce qu'il faut comprendre c'est que $\overrightarrow{AB}$ = c et que $\overrightarrow{AC}$ = b. Pour tout exercice géométrique, ne pas hésiter à faire un petit schéma pour se repérer. Ainsi on connaît déjà les normes de ces deux vecteurs, ce qui va bien nous aider. Ensuite, il faut avoir en tête que la somme des 3 vecteurs composant un triangle vaut 0, le tracé revient au point de départ. Et on peut aussi appliquer en se concentrant uniquement sur les composantes verticales ou horizontales des différents vecteurs. Or il est précisé dans l'énoncé que le segment a (donc le vecteur $\overrightarrow{BC}$) est parfaitement horizontale. Donc les composantes verticales de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$ sont égale car elles doivent nécessairement s'annuler. Ainsi on sait que le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a une norme de 5,191 et une composante verticale de 2,237. On peut donc facilement calculer la composante horizontale avec le théorème de Pythagore : $||\overrightarrow{AC}||^2 = x^2 + y^2$

$x^2 = ||\overrightarrow{AC}||^2 - y^2$

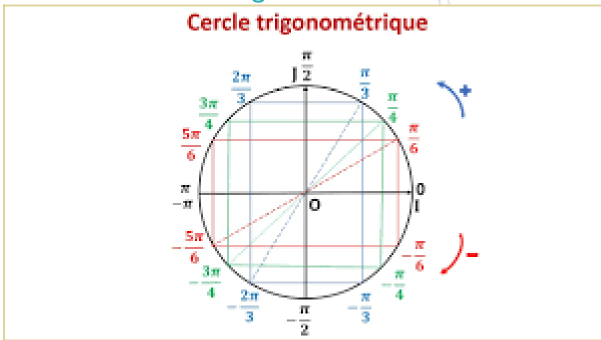
$x = \sqrt{||AC||^2 - y^2} = \sqrt{5{,}191^2 - 2{,}237^2} = 4.684$

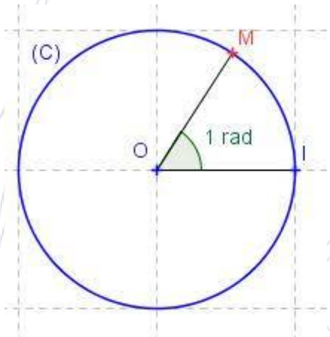
FONCTIONS SINUS ET COSINUS

Cours et exercices

I. Cercle trigonométrique, fonctions sinus et cosinus

Le cercle trigonométrique *C* est le cercle centré sur 0, de rayon 1, orienté dans le sens positif = direct = dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.





L'image d'un réel x est l'image de tout réel x+2πk (avec k un entier relatif).
Le radian est la mesure de l'angle au centre du cercle interceptant un arc de longueur 1. Le radian est une unité d'angle. Sur le deuxième schéma, l'angle IOM mesure 1rad, car OI=1 et l'arc de cercle reliant I et M =1. Le périmètre d'un cercle trigonométrique est égal à 2π, donc les réels x et x+2π ont le même point image sur le cercle trigonométrique.

Le cosinus se lit sur les abscisses (noté « cos(x) »), le sinus se lit sur les ordonnées (noté « sin(x) »).
Le cosinus et le sinus d'un réel sont toujours compris entre -1 et 1.

$\cos^2 x + \sin^2 x = (\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$.
$\cos x = \cos(x + 2\pi k)$ avec k un entier relatif. $\sin x = \sin(x + 2\pi k)$ avec k un entier relatif.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

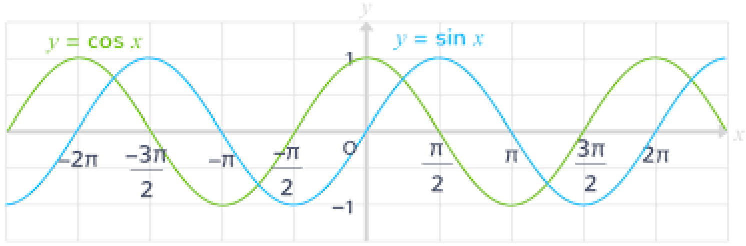
II. Parité et périodicité de fonctions

Soit une fonction *f* définie sur R.

- *f* est paire si pour tout réel x, f(-x) = f(x). Sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- *f* est impaire si pour tout réel x, f(-x) = -f(x). Sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine.

La fonction *f* est périodique de période T, si pour tout réel x on a : f(x+T) = f(x).

Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π.
Pour tout réel x, cos(-x) = cos(x), donc la fonction cosinus est paire.
Pour tout réel x, sin(-x) = -sin(x), donc la fonction sinus est impaire.



III. Courbe représentative de la fonction sinus : https://youtu.be/IEXFTy-Xf9A

Exercice 1 :

Quelle est la proposition exacte ?

A. Le domaine d'une fonction est l'ensemble des valeurs pour lesquelles cette fonction existe.
B. Le tour d'un cercle trigonométrique correspond à π.
C. $Sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.
D. La lecture du cercle trigonométrique dans le sens des aiguilles d'une montre donne des angles positifs : c'est le sens direct.

Exercice 2 :

Quelles sont les deux propositions exactes ?

A. La courbe représentative de la fonction sinus est une courbe sinusoïdale oscillant entre 1 et -1.
B. La fonction sinus existe pour les valeurs de x comprises entre 1 et -1.
C. Le domaine de la fonction sinus est R l'ensemble des réels.
D. L'image de la fonction sinus est [-2 π ; π].

IV. Les points d'intersection des courbes des fonctions sinus et cosinus :

https://youtu.be/uMJt1y2hwS8

Exercice 3 :

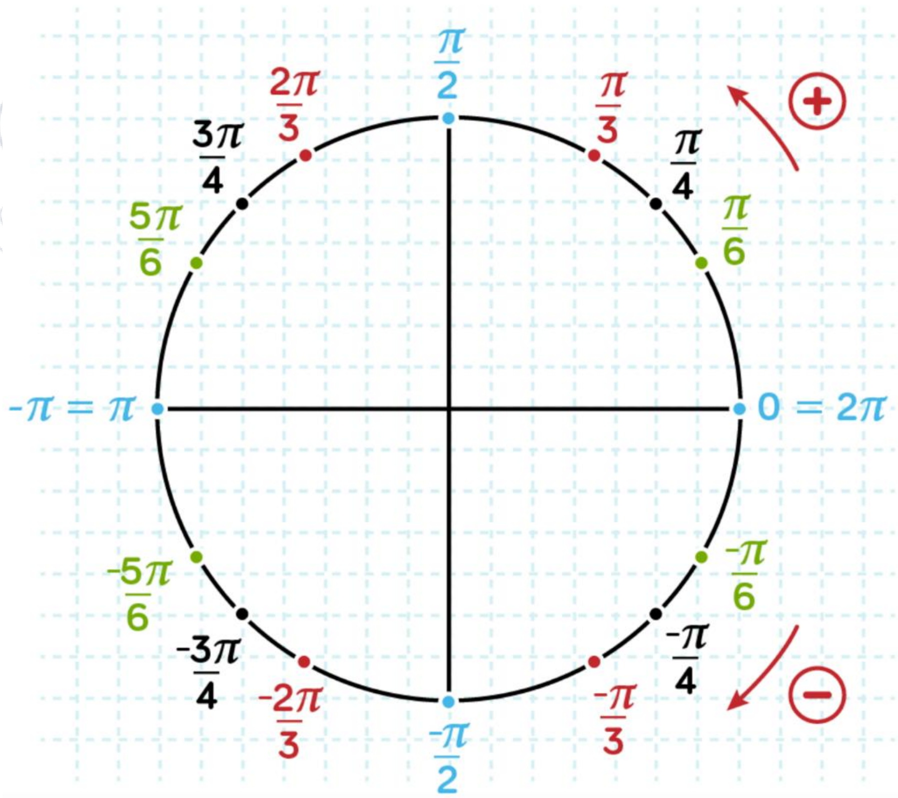
Quelles sont les deux propositions exactes ?

A. Le cercle trigonométrique a un rayon r = 1,5.
B. Les courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus ne se croisent jamais.
C. Les courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus ont un point d'intersection en $= \frac{-3\pi}{4}$.
D. La somme des angles dans un triangle est égale à π.

Correction

Exercice 1 :

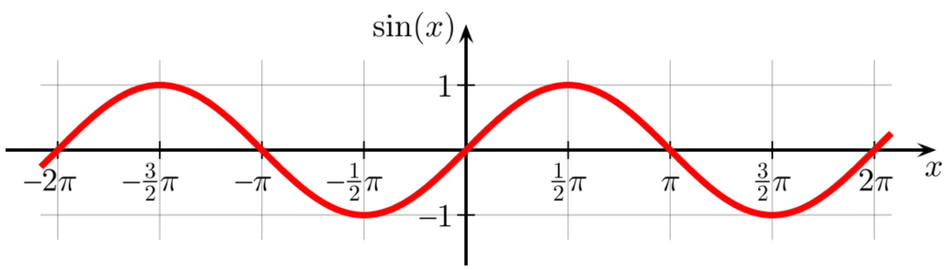
A. **VRAI** : c'est la définition. L'ensemble de ces valeurs, que peut prendre la fonction, est appelé image de la fonction.
B. **FAUX** : π correspond ½ tour de cercle. Ainsi, un tour de cercle correspond à 2π.
C. **FAUX** : Sin $(\frac{\pi}{2})$ = 1. En localisant ce point sur le cercle on trouve ses coordonnées (0 ;1) avec le cosinus en abscisse et le sinus en ordonnées.
D. **FAUX** : c'est l'inverse. Le sens direct, donnant des angles positifs, est le sens inverse des aiguilles d'une montre. Ainsi, le sens des aiguilles d'une montre correspond au sens indirect et donne des angles négatifs.



Cercle trigonométrique
Source de l'image : © SchoolMouv

Exercice 2 :

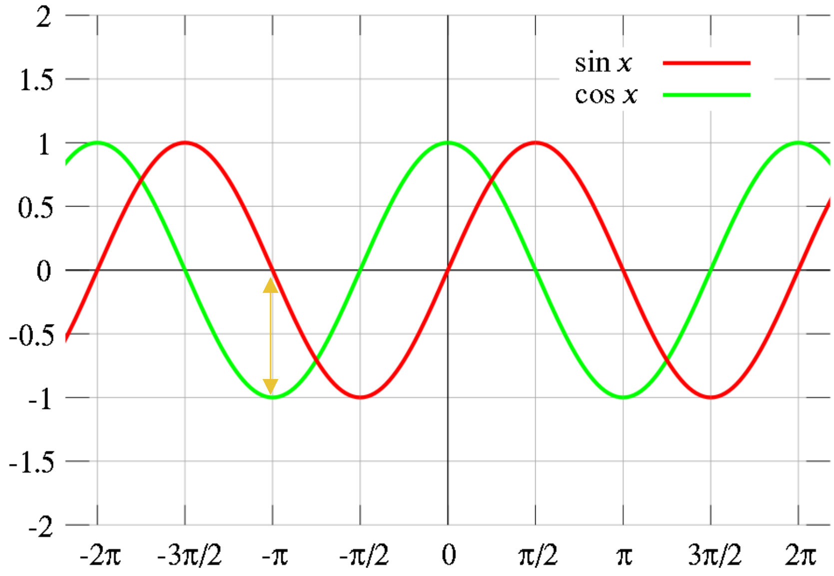
A. **VRAI** : cf. image
B. **FAUX** : La courbe peut être continuée à droite et à gauche à l'infini avec en abscisse θ (ou x sur l'image). Cela signifie que la fonction sinus existe pour toutes les valeurs possibles de θ.
C. **VRAI** : cf. correction B
D. **FAUX** : Pour rappel, l'image d'une fonction est l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre. Ici l'image est donc sin (x). On voit bien sur la courbe que : -1 $\leq$ sin (x) $\leq$ 1. L'image de la fonction sinus est [-1 ; 1].



Fonction sinus
Source de l'image : © wikipedia.org

Exercice 3 :

A. **FAUX** : r = 1
B. **FAUX** : il suffit de représenter les courbes dans un repère. Cf image
C. **VRAI** : la double flèche jaune sur le graphique correspond bien à $\theta = \frac{-3\pi}{4}$. (Pour trouver cette valeur plus facilement, considérez $-\pi = \frac{-4\pi}{4}$ et $\frac{-\pi}{2} = \frac{-2\pi}{4}$).
D. **VRAI** : à savoir.



Fonctions sinus et cosinus
Source de l'image : © wikipedia.org

PROBABILITÉS : LOI DISCRÈTE ET BINOMIALE

Cours et exercices

I. Succession d'épreuves indépendantes

1. Calculer une probabilité à l'aide d'un arbre : https://youtu.be/p2L8uoiVMOg

Exercice 1 :

Dans une urne, on met une boule noire et une boule blanche. On effectue 4 tirages avec remise. Calculer à l'aide d'un arbre la probabilité de tirer exactement deux fois une boule blanche.

2. Espace probabilisé - exemples : https://youtu.be/TdCug14-I0s

Exercice 2 :

On lance simultanément un dé à 6 faces et un dé à 4 faces. Quelle est la probabilité d'obtenir deux chiffre successifs (quelque soit l'ordre) ? On pourra représenter la situation par un tableau à double entrée.

3. Probabilité d'évènements indépendants et successifs : https://youtu.be/QuYw7vuD0TQ

Exercice 3 :

On met dans un sac trois jetons indiscernables au toucher, deux rouges et un bleu. Quelle est la probabilité d'obtenir la séquence rouge-rouge-bleu, sachant que le tirage est effectué avec remise ?

II. Coefficients binomiaux

1. Une généralisation avec les coefficients binomiaux

https://youtu.be/XDWsGeSkA_w

Exercice 4 :

Calculer :

a. 5 !

b. C_{15}^{6}

c. $P(avoir\ 6\ faces\ en\ 15\ lancers)$

2. Le triangle de Pascal

https://youtu.be/0gfTuqvK2-M

Exercice 5 :

Dessiner la suite du triangle de Pascal jusqu'à 9.

6 1 6 15 20 15 6 1

3. Lien entre la formule du binôme et les combinaisons

https://youtu.be/xCfEY-qc_KI

Exercice 6

Écrire sous forme développée (a+b)²

III. Schéma de Bernoulli et loi binomiale

1. Le schéma de Bernoulli et la loi binomiale

Lien de la fiche : https://fr.khanacademy.org/math/terminale-specialite-math/xf1ac4b39acd29386:probabilites/xf1ac4b39acd29386:schema-de-bernoulli-et-loi-binomiale/a/binomial-probability-basic

A retenir : On appelle schéma de Bernoulli de paramètres n et p :

- La répétition de **n** épreuves **identiques**
- **Indépendantes**
- Où seulement **deux issues** sont possibles : « succès » ou « échec »
- Et où la probabilité du succès vaut **p**

La probabilité d'obtenir k succès vaut : $P(k\ succès) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$

D'après le site Khan Academy

2. Loi binomiale

https://youtu.be/_WJserxjpOg

Exercice 7 :

Calculer la probabilité d'obtenir 7 faces sur 11 lancers d'une pièce.

Attention ! Il y a une erreur de notation dans la vidéo : la combinaison de k éléments parmi n se note $\binom{n}{k}$

Lien de la vidéo : https://youtu.be/YDT0zE1hW0E

Attention ! Il y a une erreur de notation dans la vidéo : la combinaison de k éléments parmi n se note $\binom{n}{k}$

Exercice 8 :

On lance un pièce 7 fois d'affilée. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de face.

A) Quelle loi suit la variable X ?

B) Quels sont ses paramètres ?

C) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 4 faces ?

3. Nombre de penalties réussis sur 6 essais

https://youtu.be/ORU8A3ZhYGw

Exercice 9 :

Calculer la probabilité de réussir 5 penalties sur 8 sachant que p=0,4.

Avec X, le nombre de penalties réussis.

4. Représentation graphique de la loi binomiale

https://youtu.be/h_D-zMFbWqs

Exercice 10 :

Construire la représentation graphique correspondant aux données de l'exercice 9.

5. Espérance et variance dans le cas de la loi de Bernoulli - exemple : https://youtu.be/E_qalVMkOa4

Exercice 11 :

Si maintenant le pourcentage d'avis favorables devient égal à 85%. Calculer la moyenne, la variance et l'écart type.

6. Espérance mathématique dans le cas de la loi binomiale : https://youtu.be/NCgxRmRcxQM

Exercice 12 :

Calculer l'espérance des données de l'exercice 9.

A retenir : Si X est une variable aléatoire comptant le nombre de succès lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes et où la probabilité du succès est p, la loi de probabilité de X est appelée la **loi binomiale de paramètres n et p.**

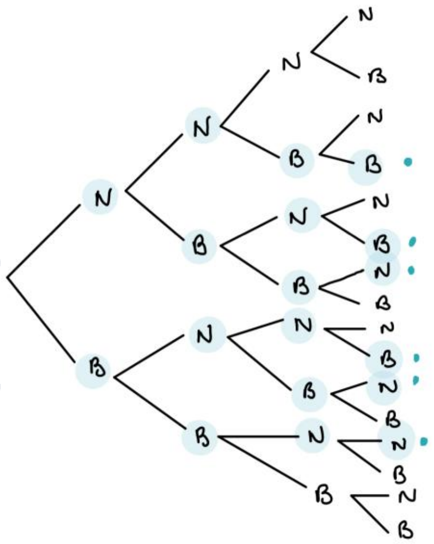
On a : $P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$

L'espérance de X est : $E(X) = n \times p$, sa **variance** est $V(X) = n \times p \times (1-p)$

Correction

Exercice 1 :

On représente la situation par l'arbre ci-dessous :



On a en tout 16 issues possibles.

Les issues favorables sont représentées par les points bleus, il y en a 6.

La probabilité d'obtenir exactement 2 boules blanches vaut donc $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

Exercice 2

On représente la situation par le tableau ci-dessous :

	1	2	3	4	5	6
1	1 1	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6
2	2 1	2 2	2 3	2 4	2 5	2 6
3	3 1	3 2	3 3	3 4	3 5	3 6
4	4 1	4 2	4 3	4 4	4 5	4 6

On a en tout 24 issues possibles (24 cases dans le tableau)

Les issues **favorables** sont en rouge, il y en a 7. La probabilité d'obtenir deux chiffres consécutifs vaut donc $\frac{7}{24}$.

Exercice 3

On a dans le sac 2 jetons rouges et un jeton bleu, soit 3 jetons au total.

La probabilité de tirer un jeton rouge est donc de $\frac{2}{3}$ et celle de tirer un jeton bleu est de $\frac{1}{3}$.

Comme les jetons sont indiscernables au toucher et que le tirage est fait avec remise, on peut considérer que les évènements sont indépendants.

La probabilité d'obtenir la séquence rouge-rouge-bleu, notée $P(RRB)$, vaut donc :

$$P(R_1) \times P(R_2) \times P(B_3) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$$

Exercice 4

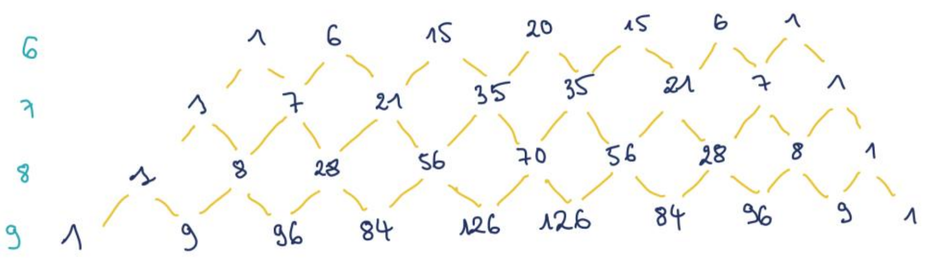
Calculer :

a. $5\,! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

b. $C_{15}^{6} = \frac{15!}{(15-6)! \times 6!} = 5005.$

c. $P(avoir\ 6\ faces\ en\ 15\ lancers) = \frac{\frac{15!}{9! \times 6!}}{2^{15}} = \frac{C_{15}^{6}}{2^{15}} \approx 0{,}15274$

Exercice 5



Exercice 6

$$\begin{aligned}(a+b)(a+b) &= a(a+b) + b(a+b) \\ &= aa + ab + ba + bb \\ &\to a^2 + a'b' + b'a' + b^2 \\ &\to \binom{2}{0} a^2 b^0 + \binom{2}{1} a'b' + \binom{2}{1} b'a' + \binom{2}{2} b^2\end{aligned}$$

Exercice 7

$$P(X=6) = \binom{7}{11} \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7}{7 \times (2 \times 3) \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} \times \frac{1}{128} = 11 \times \frac{1}{128} = \frac{11}{128}$$

Exercice 8

A) Il s'agit d'une répétition d'épreuves identiques et indépendantes à deux issues : succès ou échec. X suit donc une loi binomiale.

B) $n = 7$ et $p = 0{,}5$

C)

$$P(X=4) = \binom{7}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^7$$

$$= \frac{7!}{4!\,(7-4)!} \times \frac{1}{128} = \frac{7!}{4! \times 3!} \times \frac{1}{128} = \mathbf{0,273}$$

Exercice 9

On a p = 0,4 ; c'est la probabilité de réussite.

Réussir 5 penalties sur 8 = 0,4 × 0,4 × 0,4 × 0,4 × 0,4 × 0,6 × 0,6 × 0,6

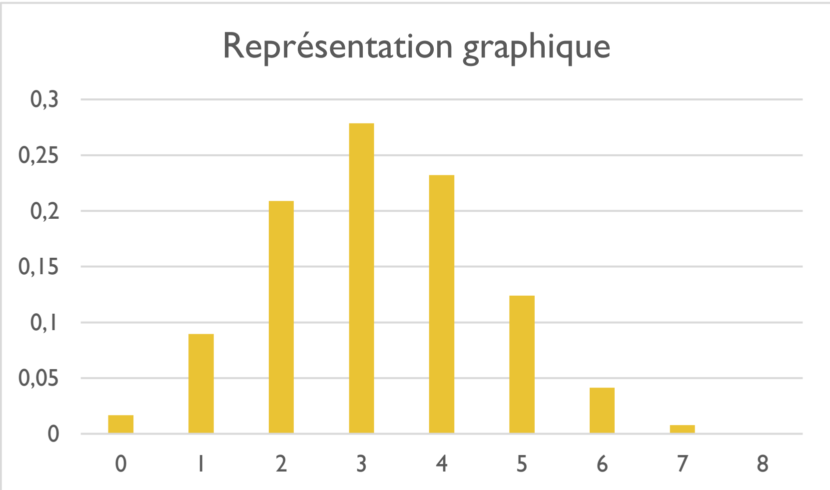
$$\binom{5}{8} = \frac{8!}{(8-5)! \times 5!} = \frac{8!}{3! \times 5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 8 \times 7 = 56$$

$$P(X = 6) = \binom{5}{8} \times 0{,}4^5 \times 0{,}6^3 = 560{,}4^5 \times 0{,}6^3 \approx 0{,}1239$$

Exercice 10

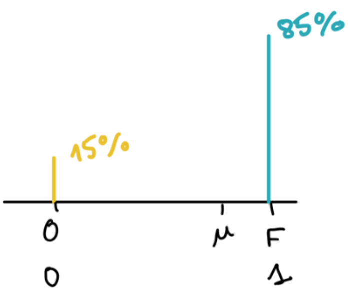
N	8
$P(but)$	0,4
$P(raté)$	0,6

K	$P(but)^k \times P(raté)^{(n-k)}$	Combinaison de k parmi n	$P(X = k)$
0	0,01679616	1	0,0167962
1	0,01119744	8	0,0895795
2	0,00746496	28	0,2090189
3	0,00497664	56	0,2786918
4	0,00331776	70	0,2322432
5	0,00221184	56	0,123863
6	0,00147456	28	0,0412877
7	0,00098304	8	0,0078643
8	0,00065536	1	0,0006554



Représentation graphique

Exercice 11



$$\mu = 0 \times 0{,}15 + 1 \times 0{,}85 = 0{,}85$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= (0 - \mu)^2 \times 0{,}15 + (1 - \mu)^2 \times 0{,}85 \\ &= -0{,}85^2 \times 0{,}15 + (1 - 0{,}85)^2 \times 0{,}85 \\ &= \mathbf{0{,}1275}\end{aligned}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0{,}1275} \approx 0{,}357$$

Exercice 12

$$E = n \times p = 8 \times 0{,}4 = 3{,}2$$

PROBABILITÉS : VARIABLES ALÉATOIRES

Cours et exercices

I. Introduction

Si je lance un dé plusieurs fois (ici 12 fois) d'affilé et que je note les issues que j'obtiens, j'aurai alors une loi de probabilité comme suit :

x (Résultat du lancer de dé)	1	2	3	4	5	6
$P(X)$ (Probabilité que cela arrive)	2/12	2/12	2/12	2/12	2/12	2/12

Si maintenant mon dé est pipé, ma loi de probabilité sera modifiée. Par exemple je pourrais avoir celle-ci :

x (Résultat du lancer de dé)	1	2	3	4	5	6
$P(X)$ (Probabilité que cela arrive)	1/12	2/12	1/12	1/12	3/12	4/12

II. Variable aléatoire

Ω : L'univers : l'ensemble des valeurs possible lors de l'expérience.

Une variable aléatoire (v.a.) est une fonction X définie sur Ω. Elle a une valeur réelle. C'est l'issu d'une expérience. Dans l'exemple de l'introduction, c'est le résultat du lancer de dé (1, 2, 3, 4, 5 ou 6).

III. Loi de probabilité

La loi de probabilité est une fonction. Elle peut s'écrire dans un tableau comme ceux de l'exemple. Elle associe à tout x, sa probabilité.

Elle peut s'écrire : $f(x) = P(X = x)$

X étant la v.a. et x sa valeur.

Selon l'exemple, l'lorsque mon dé est pipé, $f(6) = P(X = 6) = 4/12$.

IV. Espérance

1. Définition

L'espérance est la moyenne pondérée des valeurs que peut prendre la v.a.

Mathématiquement on l'exprime comme suit :

$$E(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$$

2. Propriété

$E(aX + b) = aE(X) + b$

Avec a et b, deux nombres réels.

V. Variance

1. Définition

La variance est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.

Mathématiquement on l'exprime comme suit :

$$V(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - E(X))^2 p_k$$
$$= (x_1 - E(X))^2 p_1 + (x_2 - E(X))^2 p_2 + \cdots + (x_n - E(X))^2 p_n$$
$$= E(X^2) - (E(X))^2$$

2. Propriété

$V(aX + b) = a^2 V(X)$
Avec a et b, deux nombres réels.

VI. Ecart type

1. Définition

L'écart type et la racine carré de la variance :
$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

VII. Théorème de la limite centrée ou théorème central limite (TCL)

Théorème de Laplace au début du XIXème siècle. Certaines lois de probabilité peuvent suivre des lois précises (vous le verrez l'année prochaine, il y a la loi de Poisson par exemple). Le TCL permet de mettre en évidence que lorsqu'on augmente la taille des échantillons alors la répartition d'une V.A. tends vers une loi Normale.

Lien des vidéos :
https://youtu.be/qaFPHrZ0Sds
https://youtu.be/fl1vcljeJCo
https://youtu.be/R-YYJQnGaw4
https://youtu.be/rxnNV3EMMFQ
https://youtu.be/GTIuR9DWoJY

Exercice : soit deux variables aléatoires indépendantes X et Y qui observent les résultats de 2 séries indépendantes de 20 lancés d'un dé équilibré. On considère deux autres variables aléatoires telle que et A = X + Y et B = X – Y.

On donne la loi de probabilité de X

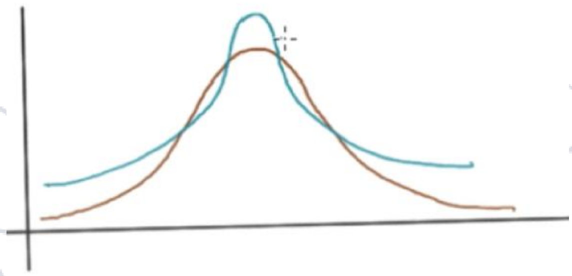
X	1	2	3	4	5	6
Répétition	7	1	3	2	6	1
$P(x = x_i)$	0,35	0,05	0,15	0,1	0,3	0,05

Et la loi de probabilité de Y

Y	1	2	3	4	5	6
Répétition	5	4	1	3	2	5
$P(x = x_i)$	0,25	0,2	0,05	0,15	0,1	0,25

1) Calculer E(A)
2) Calculer var(B)

3) VRAI ou FAUX : Selon le théorème de la limite centrée, plus on augmente la taille des échantillons sur lesquels on travaille, plus on va s'approcher de la représentation d'une loi normale en réalisant une distribution d'échantillonnage d'une variable aléatoire.
4) Corriger la phrase : Plus on augmente la taille des échantillons n, plus la courbe sera centrée sur la moyenne est plus grand sera l'écart type, car σ est proportionnel à n.
5) VRAI ou FAUX : La courbe en rouge sur l'image ci-dessous est un aplatissement négatif de la courbe bleue.
6) On a réalisé un échantillonnage sur une distribution de moyennes d'une variable aléatoire de variance 5,94. Les échantillons réalisés comprenaient 16 valeurs chacun. Calculer l'écart-type de la distribution d'échantillonnage des moyennes.



Correction

1) Calculer E(A)

$E(A) = E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

$E(X) = \frac{1.7+2.1+3.3+4.2+5.6+6.1}{20} = 3{,}1$ et $E(Y) = \frac{1.5+2.4\ 3.1+4.3+5.2+6.5}{20} = 3{,}4$

$E(A) = 3{,}1 + 3{,}4 = 6{,}5$

2) Calculer var(B)

$Var(B) = Var(XY) = Var(X) + Var(-Y) = Var(X) + Var(Y)$ car $Var(-Y) = Var(Y)$

$$Var(X) = E \times ((x-\mu_x)^2) \ = \sum_{i=1}^{n} P(x = x_{i)}(x_i - E(X))^2$$

$$Var(X) = 0{,}35(1-3{,}1)^2 + 0{,}05(2-3{,}1)^2 + 0{,}15(3-3{,}1)^2 + 0{,}1(4-3{,}1)^2 + 0{,}3(5-3{,}1)^2 + 0{,}05(6-3{,}1)^2 = 3{,}19$$

Et

$$Var(Y) = 0{,}25(1-3{,}4)^2 + 0{,}2(2-3{,}4)^2 + 0{,}05(3-3{,}4)^2 + 0{,}15(4-3{,}4)^2 + 0{,}1(5-3{,}4)^2 + 0{,}25(6-3{,}4)^2 = 3{,}84$$

Donc : $Var(B) \ = \ 3{,}19 \ + \ 3{,}84 \ = \ \mathbf{7{,}03}$

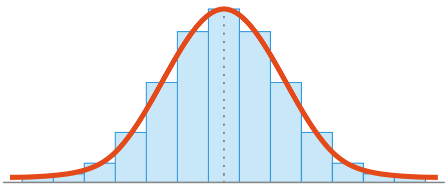
3) **VRAI**. La distribution d'échantillonnage = distribution d'une certaine statistique (ça peut être la moyenne, la fréquence, la proportion…) qu'on fait à partir d'une série d'échantillons prélevés dans une série de données qui suit une loi X.

TLC = Quand n (taille de l'échantillon) tend vers +infini, on aura une distribution normale

4) Plus on augmente la taille des échantillons n, plus la courbe sera centrée sur la moyenne est plus **petit** sera l'écart type, car σ est **inversement** proportionnel à n. C'est logique car l'écart-type est une mesure de la dispersion des valeurs ! Plus les échantillons sont grands, moins les valeurs sont dispersées, moins l'écart-type est grand.

5) **FAUX** : dans le cas d'un aplatissement positif le pic est plus pointu et le coefficient d'aplatissement est positif. Dans le cas d'un aplatissement négatif, le pic est plus étalé et le coefficient d'aplatissement est négatif.

6) On a la formule : $\sigma_x^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ avec σ_x^2 la variance de la distribution d'échantillonnage des moyennes, σ^2 la variance de la distribution initiale et n la taille des échantillons sélectionnés.
$\sigma_x^2 = \frac{5{,}94}{16} = 0{,}371$
Il faut ensuite penser à convertir la variance obtenue en un écart-type :
$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0{,}371} =$ **0,61**



MATHÉMATIQUES

REMISE À NIVEAU

TERMINALE

PRIMITIVES ET EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Exercices

I. Exercices

1. Des fonctions et leur primitive

https://youtu.be/Ncm1Kfgzo58

Exercice 1 :

Donner la dérivée de la fonction $f(x) = 4x^2 + 2x + 15$.

Exercice 2 :

Trouver une primitive de $g(x) = 2x + 7$

2. Primitive d'une fonction puissance si l'exposant est un entier naturel

https://youtu.be/wPkc6qGql6o

Exercice 3 :

Trouver une primitive des fonctions suivantes :

- $f(x) = 2x^6$
- $g(x) = 8x^{-11} + 9$
- $h(x) = -16x^3 + 7x^6$

3. Primitive de $\frac{1}{x}$

https://youtu.be/y4Mf4kdpYiA

Exercice 4 :

Quelles sont les propositions exactes :

A. La fonction logarithme népérien est défini pour tout x > 0
B. La primitive de x^{-1} est de la forme $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
C. La courbe de la fonction $\ln|x|$ est symétrique
D. Une primitive de $f(x) = x^{-3}$ est $F(x) = ln|-3| + C$

4. Primitive d'une somme de fonctions puissance

https://youtu.be/KKn6dIZEnAM

Exercice 5 :

Trouver une primitive de $f(x) = \frac{5x^7}{9} + \frac{12\sqrt{x}}{x^{-5}} - 9\sqrt{x} + \frac{1}{x}$

5. Primitives de fonctions trigonométriques et de la fonction exponentielle

https://youtu.be/vYmJxS7GuJY

Exercice 6 :

Quelles sont les propositions exactes :

A. La dérivée de la fonction f qui à x associe cos(x) est sin(x)
B. La primitive de $\cos(x)$ est de la forme $\sin(x) + C$
C. Une primitive de $f(t) = \sin(t) - \cos(t) + e^{5t}$ est $F(x) = -\cos(t) - \sin(t) + 5e^{5t} + C$
D. La fonction exponentielle a le même intervalle de définition que la fonction $\frac{1}{x}$

6. Décomposer une fraction rationnelle en éléments simples pour calculer une intégrale – exemple

Lien de la vidéo : https://youtu.be/cLyTNy9Fq0c

7. Calculer les primitives d'une fonction de la forme A(x)/B(x) en faisant la division euclidienne des deux polynômes

https://youtu.be/bpvXyxgWOVI

Exercice 7 :

Décomposer cette fraction en éléments simples afin de calculer son intégrale :

$$\int_2^6 \frac{-2x+8}{x-1}dx$$

À retenir :

Fonction	Primitive
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$
e^x	e^x+C
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)+C$
$\cos(x)$	$\sin(x)+C$
$\sin(x)$	$-\cos(x)+C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+C$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)+C$
$u'e^u$	e^u

Avec C une constante et u une fonction quelconque.

8. Qu'est-ce qu'une équation différentielle ?

https://youtu.be/WViu5SiMyeE

Exercice 8 :

Quelles sont les propositions inexactes :

A. Dans le cas d'une équation différentielle la solution a la forme d'une fonction
B. Les équations différentielles ordinaires font intervenir plusieurs variables
C. La fonction $\exp(-2x)$ est une solution de l'équation différentielle : $5y''+3y'-2y=0$
D. L'équation différentielle $x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+x\frac{\partial y}{\partial x}-8y=\cos(x)$ est du second ordre et linéaire

Équation différentielle dont la solution est une fonction linéaire : https://youtu.be/JcT_8Dv7BKA

Exercice 9 :

Trouver la solution générale de l'équation suivante : $\frac{dy}{dx}=\sqrt{x}+\frac{x}{3}$

Puis donner la solution particulière telle que : $y(1)=\frac{1}{3}$

Correction

Exercice I :

$$f'(x) = \frac{d(4x^2 + 2x + 15)}{dx} = 8x + 2$$

On a : $(kx^n)' = n \times k.x^{n-1}$

Et $(kx)' = k$ et $k' = 0$ avec k et n des constantes

Exercice 2 :

On cherche ce qui dérivé donne g(x),

On utilise le même raisonnement : $G(x) = x^2 + 7x + C$ avec C une constante

Si on veut vérifier sa réponse il suffit de la **dériver**, on doit obtenir $G'(x) = g(x)$

Exercice 3 :

On sait qu'une primitive de x^n est $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

On a : $F(x) = 2\left(\frac{x^{6+1}}{6+1} + C_1\right) = 2\left(\frac{x^7}{7} + C_1\right) = \frac{2x^7}{7} + 2C_1 = \boldsymbol{\frac{2x^7}{7} + C_2}$

Lorsqu'on a une somme, on cherche une primitive de chaque élément :

$$G(x) = 8\left(\frac{x^{(-11)+1}}{(-11)+1} + C_1\right) + 9x + C_2 = 8\left(\frac{x^{-10}}{-10} + C_1\right) + 9x + C_2 = -\frac{8x^{-10}}{10} + 8C_1 + 9x + C_2$$

$$= \boldsymbol{-\frac{4x^{-10}}{5} + 9x + C_3}$$

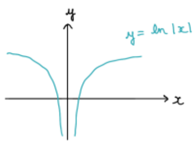
$$H(x) = (-16)\left(\frac{x^{3+1}}{3+1} + C_1\right) + 7\left(\frac{x^{6+1}}{6+1} + C_2\right) = (-16)\left(\frac{x^4}{4} + C_1\right) + 7\left(\frac{x^7}{7} + C_2\right)$$

$$= \frac{-16x^4}{4} + (-16)C_1 + \frac{7x^7}{7} + 7C_2 = \boldsymbol{-4x^4 + x^7 + C_3}$$

Exercice 4 :

Réponse : A+C

A. **VRAI**
B. **FAUX** : si on essaye d'utiliser la formule donnée on obtiendra 0 au dénominateur ce qui est impossible ! Une primitive de x^{-1} serait $\ln|x| + C$



C. **VRAI** :
D. **FAUX** : $\ln|x| + C$ est utile dans le cas de x^{-1} , autrement on peut assimiler $f(x) = x^{-3}$ à x^n sa primitive aurait la forme $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$. On a : $F(x) = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{x^{-2}}{-2} + C$

Exercice 5 :

On va chercher une primitive de chaque élément :

- $\frac{5x^7}{9} = \frac{5}{9} \times x^7 \rightarrow$ PRIMITIVE : $\frac{5}{9} \times \frac{x^{7+1}}{7+1} + C = \frac{5x^8}{72} + C$

- $\frac{12\sqrt{x}}{x^{-5}} = \frac{12 \times x^{1/2}}{x^{-5}} = 12 \times x^{1/2} \times x^{-(-5)} = 12 \times x^{1/2} \times x^5 = 12 \times x^{11/2}$

-> PRIMITIVE : $12 \times \frac{x^{\frac{11}{2}+1}}{\frac{11}{2}+1} + C = 12 \times \frac{x^{13/2}}{13/2} + C = \frac{24}{13}x^{13/2} + C$

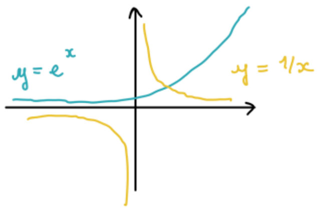
- $-9\sqrt{x} = -9 \times\ x^{1/2} \rightarrow$ PRIMITIVE : $-9 \times \frac{x^{\left(\frac{1}{2}\right)+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = -9 \times \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -6x^{\frac{3}{2}} + C$
- $\frac{1}{x} = x^{-1} \rightarrow$ PRIMITIVE : $\ln|x| + C$

On fait la somme : $\mathbf{F(x) = \frac{5x^8}{72} + \frac{24}{13}x^{13/2} - 6x^{\frac{3}{2}} + \ln|x| + C}$

Exercice 6 :

Réponse : B+C

A. **FAUX** : $(\cos(x))' = -\sin(x)$
B. **VRAI** : si on dérive $\sin(x)$ on obtient $\cos(x)$
C. **VRAI** : attention la dérivée de e^{kx}avec k la constante et x l'inconnu est de la forme ke^{kx}
D. **FAUX** : la fonction $\frac{1}{x}$ est défini pour tout $x\ \neq\ 0$ tandis que la fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$

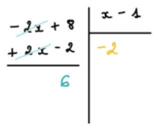


E.

Exercice 7 :

On commence par la division euclidienne :

On cherche en $-2x + 8$ combien de fois on a $x - 1$ et d'abord en -2x combien de fois x :



On obtient comme quotient **-2** et comme reste **6,** cela signifie que **:**

$$\frac{-2x+8}{x-1} = \mathbf{-2} + \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{x-1}}$$

$$\int_2^6 \mathbf{-2} + \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{x-1}}\mathrm{dx}$$

$$= [\mathbf{-2x} + \mathbf{6\ln(x-1)}]_2^6$$

$$= (\mathbf{-2} \times \mathbf{6} + \mathbf{6\ln(6-1)}) - (\mathbf{-2} \times \mathbf{2} + \mathbf{6\ln(2-1)})$$

$$= -12 + 6\ln(5) + 4 - 6\ln(1)$$

$$= \mathbf{-8 + 6\ln(5)}$$

Exercice 8 :

Il fallait répondre : C+D

A. **VRAI** : On peut même dire que la solution est un groupe de fonctions car plusieurs fonctions peuvent être solutions d'une équation différentielle.
B. **VRAI** : On a :

$y'' = -2\exp(-2x)$

$y' = (-2) \times (-2)\exp(-2x) = 4\exp(-2x)$

$y = \exp(-2x)$

Alors : $5 \times -2\exp(-2x) + 3 \times 4\exp(-2x) - 2\exp(-2x)$
$= -10\exp(-2x) + 12\exp(-2x) - 2\exp(-2x) = 0$

C. **FAUX** : Une équation différentielle est dite ordinaire si elle ne fait intervenir qu'une seule variable.
D. **FAUX** : L'équation n'est pas linéaire on trouve en facteur x^2

Exercice 9 :

$$\int dy = \int (\sqrt{x} + \frac{x}{3})dx$$

$$y = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} + C = \mathbf{\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{1}{3} + C}$$

On cherche la constante C de sorte que $y(1) = \frac{1}{3}$:

$$\frac{1}{3} = \frac{2 \times 1^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{1}{3} + C$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2 \times 1}{3} + C$$

$$C = -\frac{2}{3}$$

On a donc la solution particulière : $y = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \mathbf{\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{1}{3}}$

INTÉGRALES

Cours et exercices

I. Approche graphique et définitions

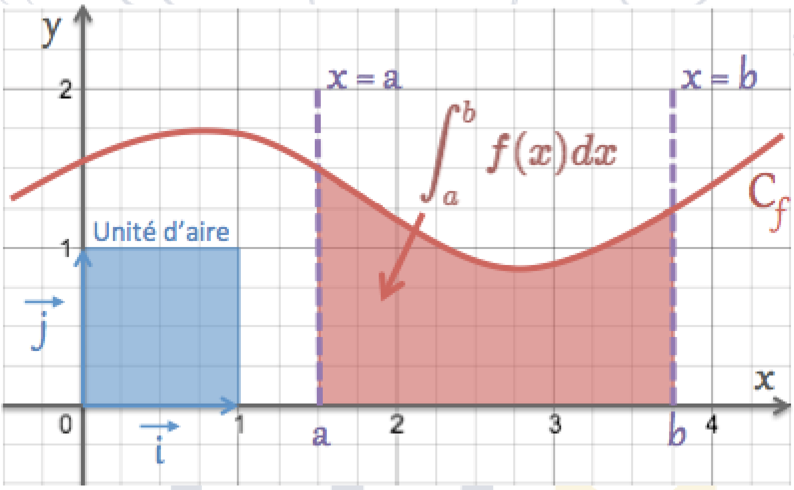
1. Qu'est-ce qu'une intégrale ? Interprétation graphique

https://youtu.be/J-VEvIqULpY

Une intégrale est un **domaine** ou une partie **du plan,** délimité par :

- La courbe $C_f = f(x)$
- L'axe des abscisses (« des x ») (y=0)
- Les droites d'équation, $x = a \; et \; x = b$, avec a et b les bornes de l'intégrale (ou **bornes d'intégration**) [a ; b].

Cela correspond donc à la surface, ou l'aire, en rouge sur l'image.



Aire sous la courbe
Source de l'image : © afterclasse.fr

Une intégrale correspond à **l'aire sous la courbe** représentative d'une **fonction f continue et positive,** sur un intervalle [a ; b]. Elle se note de la manière suivante $\int_a^b f(x)dx$, (lue : « intégrale de a à b de f »)

On appelle **unité d'aire (u.a)**, l'aire du rectangle de coté $\vec{\imath} \; et \; \vec{\jmath}$

2. Comment calculer une intégrale ? Interprétation graphique

https://youtu.be/xHOhUZe3wxs

<u>Méthode des rectangles :</u>

1. Découper l'aire sous la courbe en rectangles ou en carré pour estimer la surface → découper en carré ou en rectangles la surface sous la courbe. Plus on augmente n, plus l'estimation de l'aire sous la courbe est bonne.

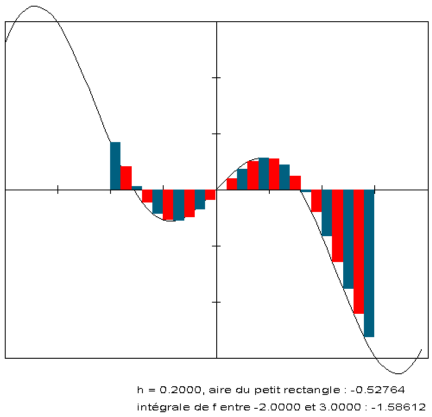
2. Calculer l'aire des n rectangles :

   Sommes de l'aire des rectangles ou estimation de l'aire sous la courbe :

$$A_{[a;b]} = \sum_{i=1}^{n} L_i \times l_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \times \Delta(x_i)$$

3. Si on fait tendre n vers l'infini (une infinité de petits rectangles), on obtient une intégrale, c'est-à-dire la somme d'une infinité de rectangles de largeur infinitésimale :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f(x_i) \times \Delta(x_i)} = \int_a^b \boldsymbol{f(x)dx}$$



Méthode des rectangles
Source de l'image : © Xavierdupré

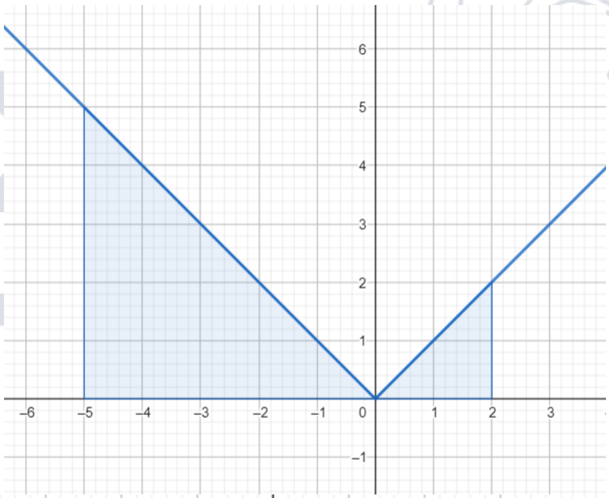
L'amplitude des intervalles tend vers 0 : on parle de de valeurs infinitésimales.

Remarque : il existe aussi une méthode des trapèzes mais elle n'est pas au programme en France.

Exercice 1 :

Déterminer $\int_{-5}^{2} \boldsymbol{f(x)dx}$ à partir du graphique

On prendra 1 u.a = 1 grand carreau



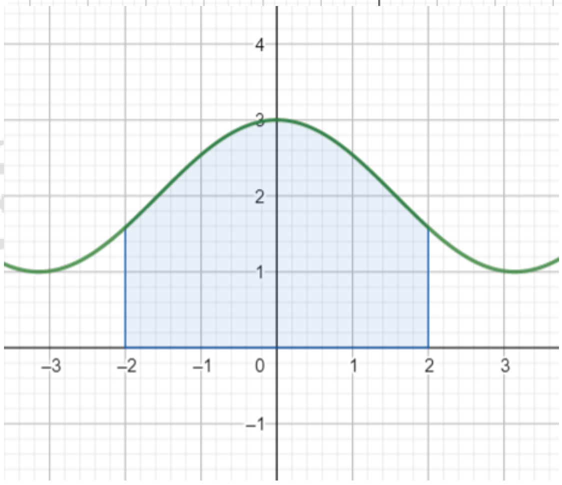
Exercice 2 :

On note $A = \int_{-2}^{2} f(x)$.

Quelle est la valeur de A ?

On prendra 1 u.a = 1 grand carreau

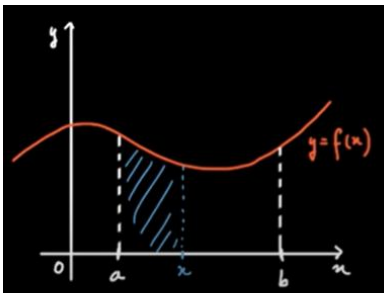
a) A = 9,8 u.a
b) A = 98 u.a
c) A = 128 u.a
d) A = 12,8 u.a



3. Théorème fondamental du calcul d'intégrale

https://youtu.be/M3XoxtPcrS0

Soit une **fonction continue et positive,** f, sur un intervalle [a ; b].



Extrait de la vidéo ci-dessus

- La primitive de la fonction f sur [a ; b] est :

$$\boldsymbol{F(x) = \int_a^x f(t)dt}$$

On utilise la variable t car x apparait déjà dans les bornes d'intégration.

- Elle est définie sur [a ; b], donc $F(x)$ est dérivable sur [a ; b] :

$$\boxed{\boldsymbol{F'(x) = f(x)}, avec\ x\ \epsilon\ [a; b]}$$

Note : $F(a) = 0$, car cela correspond à l'intervalle [a ; a], cela s'annule lors du calcul d'intégrale

II. Méthodologie : déterminer une primitive

Le calcul d'intégrale commence par une recherche de primitive.

Dérivation → / ← Intégration

Primitive F (x) — $F'(x) = f(x)$ — Fonction f(x) — Dérivée f '(x)

Dérivation → / ← Intégration

1. Formules utiles

a. Méthode 1

(Conseillée, pas besoin d'apprendre de nouvelles formules, on réutilise celles de la dérivation)

On reconnait la forme dérivée, la fonction f, puis on remonte à la fonction initiale, qui sera donc la primitive F.

→ logique de la méthode $f \leftrightarrow primitive\ et\ f' \leftrightarrow fonction$

Fonction f	Fonction dérivée f'	Intervalle de définition
$f(x) = a$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	x est un réel de $]-\infty\,;0[\ ou\ ]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$[0\,;\,+\infty[$
$f = u \times v$	$f' = u'.v + u.v'$	Dépend des fonctions
$f = \frac{u}{v}$	$f' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$	Dépend des fonctions

Exemple :

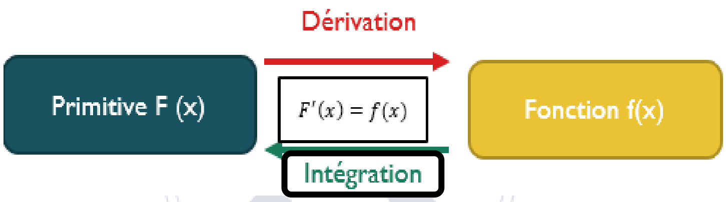
On cherche la primitive de $f(x) = 2x + 3$. → on reconnait une somme

Sachant que $(x^n)' = nx^{n-1}$ et $(ax)' = a$, on peut remonter à la primitive :

- $(x^n)' = nx^{n-1} \rightarrow (x^2)' = 2x^1$
- $(ax)' = a \rightarrow (3x)' = 3$

Ainsi, $F = x^2 + 3x$

→ logique de la méthode $(x^n) \leftrightarrow primitive\ et\ nx^{n-1} \leftrightarrow fonction$



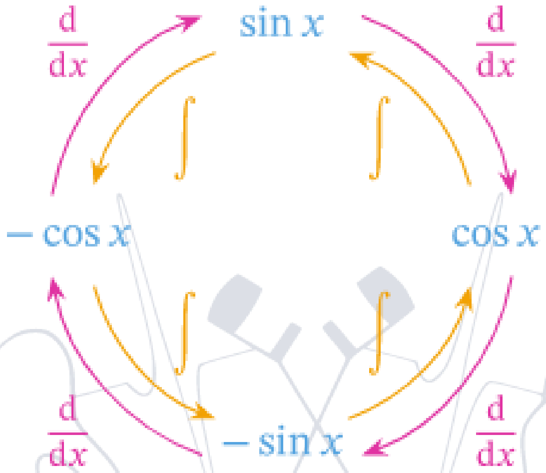
b. Méthode 2

On reconnait la forme de la fonction, puis on cherche sa primitive.

→ logique de la méthode $F \leftrightarrow primitive\ et\ f \leftrightarrow fonction$

Fonction f	Primitive F	Intervalle de définition
$f(x) = a$	$F(x) = ax$	a réel quelconque, défini sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{x^3}{3}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	n entier naturel, défini sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x$	$]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$	$]-\infty\,;0[\ ou\ ]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$[0\,;\,+\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = u'(x)e^{u(x)}$	$F(x) = e^{u(x)}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = u'(x)u(x)^n$	$F(x) = \frac{u(x)^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$	$F(x) = \ln u(x)$	$]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)^2}$	$F(x) = -\frac{1}{u(x)}$	$]-\infty\,;0[\ ou\ ]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$F(x) = 2\sqrt{u(x)}$	$[0\,;\,+\infty[$

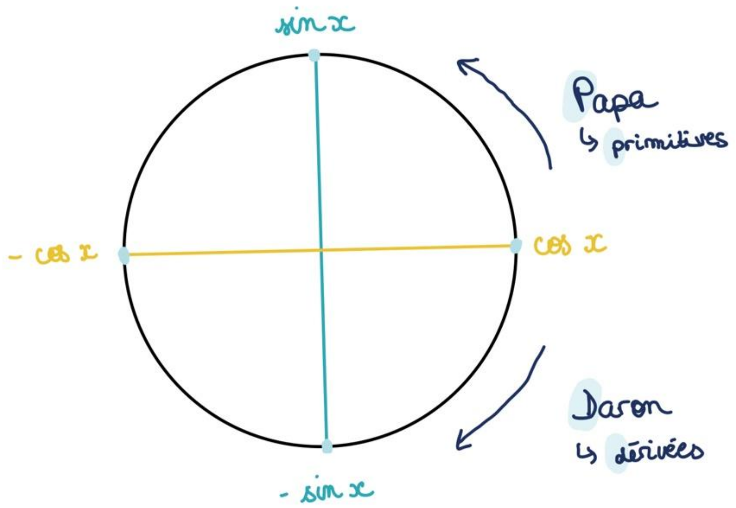
c. Trigonométrie



Source de l'image : © nagwa.com

Mnémotechnique : L'astuce du daron pour arrêter de tourner en rond dans le cercle trigonométrique :

- Un **P**apa c'est top → vers le haut → dans le sens direct → **P**rimitive
- Un **D**aron te met KO direct → vers le bas → dans le sens indirect → **D**érivée



L'astuce du Daron en trigonométrie : https://www.youtube.com/watch?v=7eV4XyXjlsc

2. Exercices

Exercice 3 : Calculer les primitives suivantes :

- $f(x) = 5x^4 + \frac{1}{\sqrt{x}}$
- $g(x) = \frac{1}{8x}$
- $h(x) = 9x^2 \times e^{3x^3}$
- $i(x) = \frac{1}{2\sqrt{25x}}$

III. Méthodologie : calcul d'intégrale

I. Calcul d'intégrale

→ Vidéo : Appliquer le théorème fondamental de l'analyse : https://youtu.be/H59lo2sRPAk

→ Vidéo : Si F est une primitive de f, l'intégrale de a à b de f est $F(b) - F(a)$: https://youtu.be/Tv7BOEEcb2k

Soit une **fonction continue et positive,** f, sur un intervalle [a ; b], dont une primitive est F.

- On peut calculer **l'intégrale de a à b de f**, grâce à la formule suivante :

$$\boxed{[\boldsymbol{F(x)}]_a^b \int_a^b \boldsymbol{f(x)dx} = [\boldsymbol{F(x)}]_a^b = \boldsymbol{F(b)} - \boldsymbol{F(a)}}$$

Propriété : Toute fonction continue sur un intervalle [a ; b] admet des primitives sur [a ; b].

IV. Exercices

Exercice 4 : Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_{-2\pi}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos(x)\, dx$

b) $\int_4^{16} (25x\sqrt{x})\, dx$

c) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{6\pi} 54\sin(x)\, dx$

Exercice 5 :

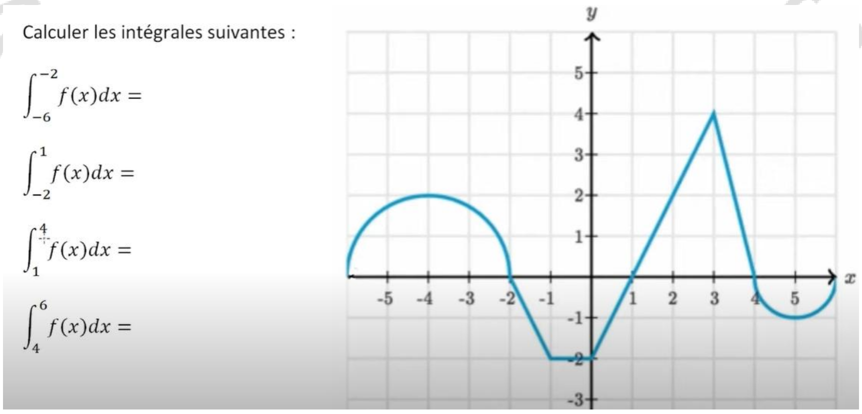
On étudie la fonction $t(x) = \frac{16-x^3}{x^3}$

a) Déterminer $T(x)$, une primitive de $t(x)$.

b) Calculer $\int_{-1}^{1} t(x)dx$

Exercices pour aller plus loin :

→ **Exercice 1 :** énoncé (mettre en pause la vidéo à 0:16) puis correction vidéo : https://youtu.be/AQnA5vNwcAk



→ **Exercice 2 :** énoncé (mettre en pause) puis correction vidéo : https://youtu.be/AQnA5vNwcAk

Calculer les intégrales suivantes :

- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, dx$

- $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(x)\,dx$
- $\int_{0}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(x)\,dx$

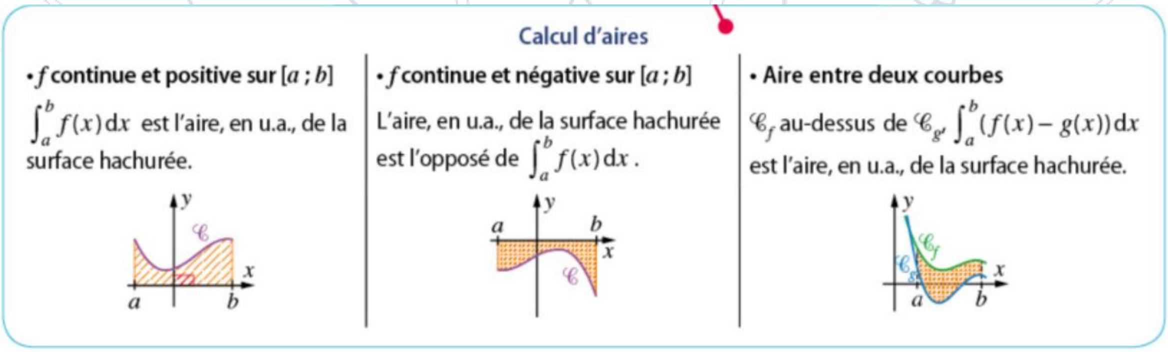
Finalement,

- $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx$

V. Applications du calcul d'intégrale

1. Calcul d'aire

→ Vidéo : Aire du domaine délimité par deux courbes : https://fr.khanacademy.org/math/terminale-specialite-math/xf1ac4b39acd29386:calcul-integral/xf1ac4b39acd29386:calcul-d-aires/v/area-between-curves



Source de l'image : © Bordas Terminale Indice

2. Valeur moyenne

Soit f une fonction continue sur l'intervalle [a ; b], on appelle **valeur moyenne** de f sur [a ; b], le réel défini par :

$$\boxed{\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$$

Exercice 6 :

Un sédatif est administré à un patient particulièrement agité, il a été admis en psychiatrie pour un amour passionnel du cycle de Krebs. La concentration en $mg.L^{-1}$ dans son sang est décrite par la fonction suivante, sur l'intervalle $[0;\ 24]$:

$$c(t) = \frac{4}{3}(1 - e^{-3\times t})$$

Calculer la concentration moyenne en sédatif dans le sang au cours des 10 heures, exprimer le résultat en valeur exacte puis arrondi au centième.

Note : Cette fonction a un modèle qui sera vu en UE3 (mathématique et statistique).

$$C(t) = \frac{k_i}{k_e}(1 - e^{-k_e \times t})$$

Avec :

$C(t)$: concentration au cours du temps

K_i : constante d'administration (en lien débit de la perfusion)

K_e : constante d'élimination *(en lien avec la métabolisation par le foie du médicament)*

VI. Propriétés des intégrales

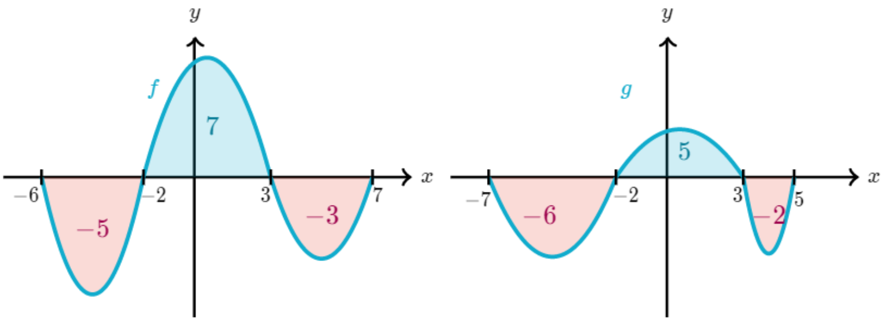
- « **Linéarité - somme et différence :** $\boxed{\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx}$
  La vidéo.
- **Linéarité - multiplication par une constante :** $\boxed{\int_a^b k \times f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx}$
  La vidéo.
- **Permutation des bornes :** $\boxed{\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx}$
  La vidéo.
- **Bornes d'intégration confondues :** $\boxed{\int_a^a f(x)dx = 0}$
  La vidéo.
- **Relation de Chasles :** $\boxed{\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx}$
  La vidéo. »
- **Comparaison** : Si, pour tout x ∈ [a ; b], si $f(x) \geq g(x)$ alors $\int_a^b f(x) \geq \int_a^b g(x)$

Source : Propriétés des intégrales - un formulaire (leçon) | Khan Academy

Exercice 7 :

En utilisant la relation de Chasles, déterminer $\int_{-5}^{5} |x|dx$

Exercice 8 : A l'aide du graphique suivant, déterminer :



- $\int_{-2}^{3}[f(x) + g(x)]dx$
- $\int_{-2}^{3} 5 \times g(x)dx$
- $\int_7^3 f(x)dx$
- $\int_6^6 f(x)dx$

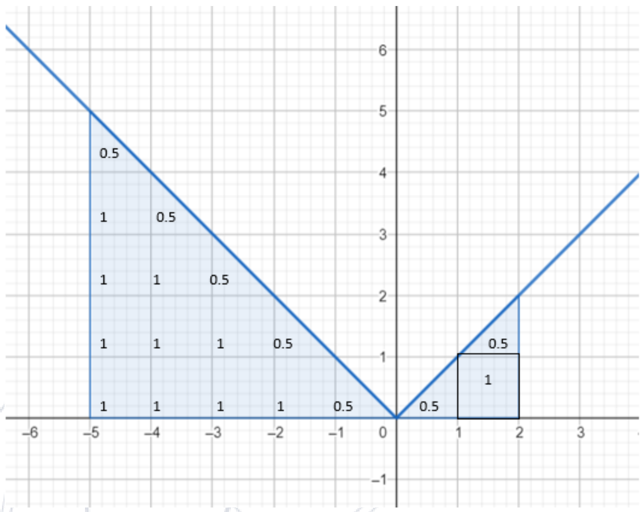
Source de l'image : © Khan Academy

Correction

Exercice 1 :

En comptant le nombre d'unités d'aire sur la courbe, on trouve :

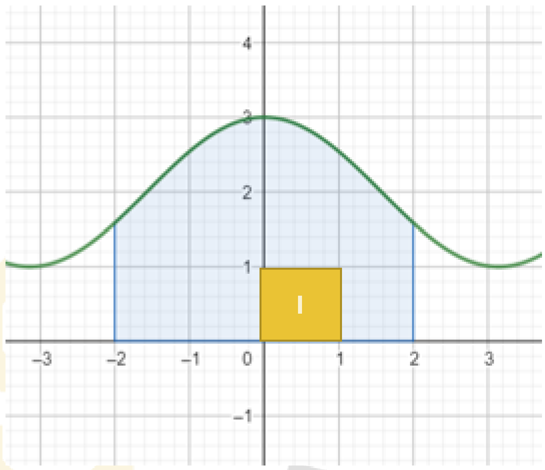
$\int_{-5}^{2} \boldsymbol{f(x)dx}$ = 14,5 u.a



Exercice 2

Par lecture graphique, on trouve :

Réponse a) A = 9.8 u.a



Exercice 3 :

Fonctions de base	Raisonnement par reconnaissance des formes	Primitive
$f(x) = 5x^4 + \frac{1}{\sqrt{x}}$	1) $(u+v)' = u' + v'$ $u' = 5x^4$ et $v' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 2) On reconnait la forme $\boldsymbol{(x^n)' = nx^{n-1}}$ $u = x^5\ et\ u' = 5x^4$ 3) D'après le cours, on sait que $\boldsymbol{z = \sqrt{x}\ et\ z' = \frac{1}{2\sqrt{X}}}$ Donc si on veut arriver à la forme dérivée, il faut ajouter $\boldsymbol{(kz)' \to kz}$ $v = 2\sqrt{x}\ et\ v' = \cancel{2} \times \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{X}}$ Û $v = 2\sqrt{x}\ et\ v' = \frac{1}{\sqrt{X}}$ 4) Finalement, $\int(5x^4 + \frac{1}{\sqrt{X}})dx = x^5 + 2\sqrt{x}$	$\boldsymbol{F(x) = x^5 + 2\sqrt{x}}$
$g(x) = \frac{1}{8x}$	1) On reconnait la forme $\boldsymbol{(\ln(x))' = \frac{1}{x}}$	$\boldsymbol{G(x) = \frac{1}{8} \times ln(x)}$

	Donc $\int (k \times \frac{1}{x})dx = k \times \ln(x)$ Ici $k = \frac{1}{8}$	
$h(x) = 9x^2 \times e^{3x^3}$	I) On reconnait la forme $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}$ $h(x) = 9 \times x^2 \times e^{3x^3} = 3 \times 3x^2 \times e^{3x^3}$ Donc $\int [u'(x)e^{u(x)}]dx = e^{u(x)}$ $H(x) = e^{3x^3}$	$\boldsymbol{H(x) = e^{3x^3}}$
$i(x) = \frac{1}{2\sqrt{25x}}$	**1)** On reconnait la forme : $(\mathbf{k \times z})' = \mathbf{k \times z'}$ 2) On simplifie l'expression : $i(x) = \frac{1}{2\sqrt{25x}} = \frac{1}{2 \times \sqrt{25} \times \sqrt{x}}$ $\leftrightarrow i(x) = \frac{1}{2 \times 5 \times \sqrt{x}} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2 \times \sqrt{x}}$ 3) On voit que $k = \frac{1}{5}$, et on reconnait la forme $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 4) Donc $\int (k \times \frac{1}{2\sqrt{x}})dx = k \times \sqrt{x}$ $I(x) = \int (\frac{1}{5} \times \frac{1}{2\sqrt{x}})dx = \frac{1}{5} \times \sqrt{x}$	$\boldsymbol{I(x) = \frac{1}{5} \times \sqrt{x}}$

Exercice 4 :

a) $\boldsymbol{\int_{-2\pi}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos(x)\, dx = 2}$

1/ On détermine une primitive de la fonction à intégrer (voir II. 1. c trigonométrie) :

$$\int_{-2\pi}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos(x)\, dx = 2 \times \int_{-2\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, dx = 2 \times [\sin(x)]_{-2\pi}^{\frac{\pi}{2}}$$

2/ On calcule l'intégrale :

$$\int_{-2\pi}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos(x)\, dx = 2\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(-2\pi)\right] = 2 \times (1 - 0) = 2$$

b) $\boldsymbol{\int_4^{16} (25x\sqrt{x})\, dx = 9920}$

1/ On simplifie l'expression (pour rappel $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$)

$$\int_4^{16} (25x\sqrt{x})\, dx = 25\int_4^{16} (x\sqrt{x})\, dx = 25\int_4^{16} (x^1 \times x^{\frac{1}{2}})\, dx = 25\int_4^{16} (x^{\frac{3}{2}})\, dx$$

2/ On détermine une primitive de la fonction à intégrer (on utilise la formule $f(x) = x^n \leftrightarrow F(x) = \frac{(x^{n+1})}{n+1}$):

$$\int_4^{16} (25x\sqrt{x})\,dx = 25\int_4^{16} (x^{\frac{3}{2}})\,dx = 25 \times \left[\frac{\left(x^{\frac{3}{2}+1}\right)}{\frac{3}{2}+1}\right]_4^{16} = 25 \times \left[\frac{\left(x^{\frac{5}{2}}\right)}{\frac{5}{2}}\right]_4^{16} = 25 \times \left[\frac{2}{5} \times x^{\frac{5}{2}}\right]_4^{16} =$$

$$= 25 \times \left[\frac{2}{5} \times x^{\frac{4}{2}} \times x^{\frac{1}{2}}\right]_4^{16} = 25 \times \left[\frac{2}{5} \times x^2\sqrt{x}\right]_4^{16}$$

3/ On calcule l'intégrale

$$\int_4^{16} (25x\sqrt{x})\,dx = 25 \times \left[\frac{2}{5} \times x^2\sqrt{x}\right]_4^{16} = 25 \times [\frac{2}{5} \times 16^2\sqrt{16} - \left(\frac{2}{5} \times 4^2\sqrt{4}\right)] = \mathbf{9920}$$

c) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{6\pi} \mathbf{54\sin(x)\,dx = -54}$

1/ On détermine une primitive de la fonction à intégrer (voir II. I. c trigonométrie) :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{6\pi} 54\,sin(x)\,dx = [54 \times (-\cos(x))]_{\pi/2}^{6\pi} = [-54 \times \cos(x)]_{\pi/2}^{6\pi}$$

2/ On calcule l'intégrale (astuce rapidité : pas besoin de calculatrice, utilise les valeurs du cercle trigonométrique) :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{6\pi} 54\,sin(x)\,dx = [-54 \times \cos(x)]_{\pi/2}^{6\pi} = [-54\cos(6\pi) - \left(-54\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)]$$

$$= [-54 \times 1 - (-54 \times 0)] -= -\mathbf{54}$$

Exercice 5 :

On étudie la fonction $t(x) = \frac{16-x^3}{x^3}$

a) Déterminer $T(x)$, une primitive de $t(x)$.

$$T(x) = \int \frac{16-x^3}{x^3}\,dx = \int \frac{16}{x^3} - \frac{x^3}{x^3}\,dx = \int \frac{16}{x^3}dx - \int \frac{x^3}{x^3}\,dx$$

$$= 16\int \frac{1}{x^3}dx - \int 1\,dx = 16 \times \left(-\frac{1}{2x^2}\right) - x = -\frac{16 \times 1}{2x^2} - x$$

$$\boldsymbol{T(x) = -\frac{8}{x^2} - x}$$

Remarque : $\int \frac{1}{x^3}dx = \int x^{-3}dx = \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2x^2}$

On a utilisé la formule $f(x) = x^n \leftrightarrow F(x) = \frac{(x^{n+1})}{n+1}$

b) Calculer $\int_{-1}^{1} t(x)dx$

$$\int_{-1}^{1} t(x)dx = [T(x)]_{-1}^{1} = T(1) - T(-1) = \left(-\frac{8}{1^2} - 1\right) - \left[-\frac{8}{(-1)^2} - (-1)\right]$$

$$= (-8-1) - (-8+1) = -9 + 7$$

$$\boldsymbol{\int_{-1}^{1} t(x)dx = -2\,u.a}$$

Exercice 6 :

D'après l'énoncé, on a $c(t) = \frac{4}{3}(1 - e^{-3\times t})$ sur I = [0 ; 24] et on cherche à calculer la concentration moyenne en sédatif dans le sang au cours des 10 heures, exprimer le résultat en valeur exacte puis arrondi au millième.

→On va donc calculer la valeur moyenne de c sur [0 ; 10] en utilisant la formule suivante :

$$\boldsymbol{\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$$

On l'adapte à l'énoncé

$$\mu = \frac{1}{10-0}\int_0^{10} \mathrm{c(t)dt}$$

$$\mu = \frac{1}{10-0}\int_0^{10} \frac{4}{3}(1 - e^{-3\times t})dt$$

Premièrement, il faut déterminer la primitive de la fonction c(t).

$$\int c(t)dt = \int \frac{4}{3}(1 - e^{-3\times t})dt$$

$$= \int \frac{4}{3} - \frac{4}{3}e^{-3\times t}dt$$

$$= \int \frac{4}{3}\,dt + \int -\frac{4}{3}e^{-3\times t}\,dt$$

$$= \frac{4t}{3} - \frac{4}{3} \times \int e^{-3\times t}\,dt \;=\; \frac{4t}{3} - \frac{4}{3} \times (-\frac{1}{3}).e^{-3t}$$

$$\boxed{\boldsymbol{C(t) = \frac{4t}{3} + \frac{4}{9}e^{-3t}}}$$

Ensuite, on calcul l'intégrale :

$$\int_0^{10} c(t)dt = \int_0^{10} \frac{4}{3}(1 - e^{-3\times t})dt = \left[\frac{4t}{3} + \frac{4}{9}e^{-3t}\right]_0^{10}$$

$$\left[\left(\frac{4\times 10}{3} + \frac{4}{9}e^{-3\times 10}\right) - \left(\frac{4\times 0}{3} + \frac{4}{9}e^{-3\times 0}\right)\right] = \frac{40}{3} + \frac{4}{9}e^{-30} - \frac{4}{9} = \frac{116}{9} + \frac{4}{9}e^{-30}$$

$$\boxed{\int_0^{10} \frac{4}{3}(1 - e^{-3\times t})dt = \frac{116}{9} + \frac{4}{9}e^{-30}\ u.a}$$

On peut maintenant calculer la valeur moyenne :

$$\mu = \frac{1}{10-0}\int_0^{10} \frac{4}{3}(1 - e^{-3\times t})dt = \frac{1}{10-0} \times \frac{116}{9} + \frac{4}{9}e^{-30}$$

$$\boxed{\mu = \frac{58e^{30}+20}{45e^{30}}\ 1.29\ mg.L^{-1}}$$

Pour conclure, la concentration moyenne en sédatif dans le sang au cours des 10 heures est de $\frac{58e^{30}+20}{45e^{30}}\ mg.L^{-1}$, soit environ 1.29 $mg.L^{-1}$

Exercice 7 :

Pour rappel, la relation de Chasles est $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$.

Sachant que la fonction $f(x) = |x|$ a pour expression : $f(x) = -x \; sur \; [-\infty; 0] \; et \; f(x) = x \; sur \; [0; +\infty]$, on peut transformer l'intégrale de la manière suivante, avec la relation de Chasles

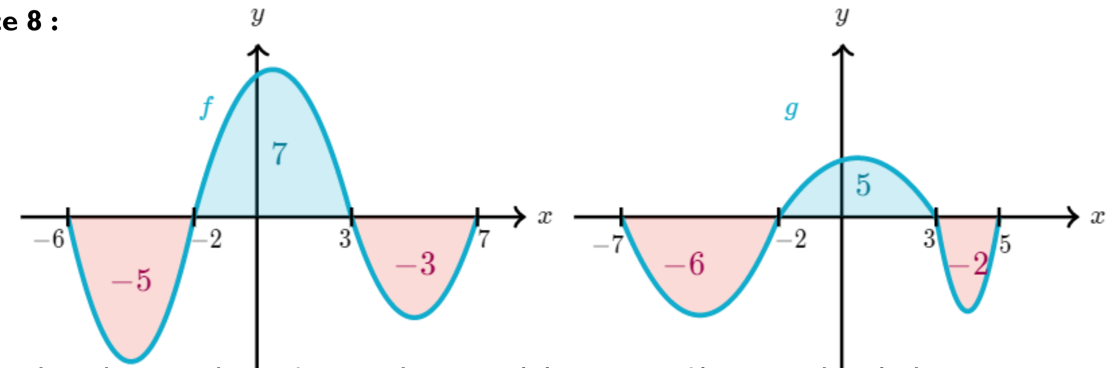
$$\int_{-5}^{5} |x| dx = \int_{-5}^{0} -x \, dx + \int_{o}^{5} x \, dx$$

On calcule ensuite les intégrales

$$\int_{-5}^{5} |x| dx = \int_{-5}^{0} -x \, dx + \int_{o}^{5} x \, dx = \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-5}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{5} = \left((-\frac{(0)^2}{2}) - (-\frac{(-5)^2}{2})\right) + (\frac{5^2}{2} - \frac{0^2}{2})$$

$$\int_{-5}^{5} |x| dx = 25 \, u.a$$

Exercice 8 :



En utilisant les valeurs sur le graphique et les propriétés, on peut déterminer les résultats :

- **Linéarité - somme et différence :**

$$\int_{-2}^{3} [f(x) + g(x)] dx = \int_{-2}^{3} f(x) dx + \int_{-2}^{3} g(x) dx = 7 + 5 = 12 \, u.a$$

- **Linéarité - multiplication par une constante :**

$$\int_{-2}^{3} 5 \times g(x) dx = 5 \int_{-2}^{3} g(x) dx = 5 \times 7 = 35 \, u.a$$

- **Permutation des bornes :**

$$\int_{7}^{3} f(x) dx = -\int_{3}^{7} f(x) dx = -(-3) = 3 \, u.a$$

- **Bornes d'intégration confondues :**

$$\int_{6}^{6} f(x) dx = 0 \, u.a$$

PROBABILITES : LOI DES GRANDS NOMBRES, LOI À DENSITÉ ET LOI NORMALE

Cours et exercices

I. Loi des grands nombres

Loi extrêmement intuitive, mais doit être bien comprise pour être utilisée. Si on doit la résumer en une seule phrase : "plus on répète un phénomène aléatoire, plus la moyenne des issues sera proche de la moyenne théorique".

Lien de la vidéo : https://youtu.be/zOhc6l29lql

Exemple :

Je garde l'exemple classique d'un dé à 6 faces non-truqué.
Si je le lance uniquement 2 fois et que je fais une moyenne de mes 2 résultats, cette moyenne n'est pas très prédictible, étant donné que la "part d'aléatoire" est grande, je peux tomber, par hasard, 2x d'affilé sur le nombre 6.
Par contre, si je lance le dé 10 000 fois, il est presque impossible que je ne fasse que des 6. En effet, je risque de faire des 6, mais je risque également de faire presque autant de 1. De même, les 5 et les 2 s'annuleront, etc..
Ainsi, toutes les valeurs que je vais faire vont en quelques sortes se "compenser" entre-elles, et au fur et à mesure du nombre de lancers, la moyenne de ces valeurs commencera à converger vers la moyenne théorique, c'est-à-dire :

$$\frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3{,}5$$

Il est alors intuitif de penser que plus le nombre de lancers sera important, plus la moyenne de ces lancers se rapprochera de la moyenne théorique de l'expérience.

Exercice 1

On a un sac rempli de 33 boules rouges et de 33 autres blanches. On va tirer au sort 33 de ces boules.

On a X, le nombre de boules blanches tirées.

Au premier essai on tire 6 boules blanches et 27 rouges. On en fait une multitude d'autre tirage.

Si on fait la moyenne de tous ces tirages, vers quelle valeur la moyenne du nombre de boules blanches tirées va tendre ?

II. Notion de loi a densité

Densité de probabilité.

Lien de la vidéo : https://youtu.be/m9vQx9gHrLA

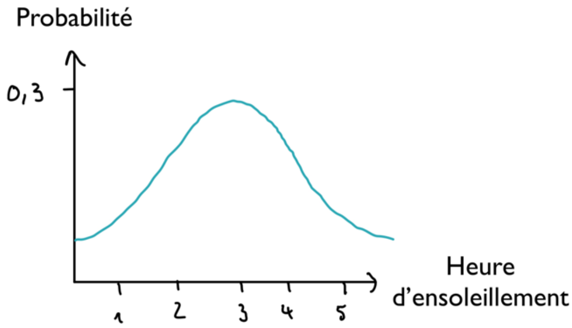
Exercice 2

On a X, le nombre d'heure d'ensoleillement dans une journée.

Hachurer les probabilités suivantes :

a. $P(X = 3)$

b. $P(X > 1)$
c. $P(X < 4)$
d. $P(2 < X < 5)$



III. Loi normale

Lien vers la vidéo : « Loi Normale Centrée Réduite et Généralisée – Probabilité » de Mathrix https://www.youtube.com/watch?v=prYIKm1XGjQ&list=WL&index=49

1. Loi de probabilité continue à densité et probabilités

Une loi de probabilité peut être **discrète** c'est-à-dire que **la variable aléatoire** (qui contient tous les évènements possibles) **ne peut prendre que certaines valeurs.**
Par exemple, le nombre d'enfants qu'a une personne est une variable aléatoire discrète : on ne peut pas avoir 3,14159265 enfants.

Par exemple, si l'on place dans un sac des cartes avec les numéros de 1 à 5, on ne pourra que calculer les probabilités pour un nombre fini de valeurs, à savoir 1, 2, 3, 4 et 5.

Cependant il peut arriver que l'on ne **puisse pas définir un nombre fini d'évènements** possibles, on parlera alors de **lois de probabilité continue**. La variable aléatoire est alors représentée par une fonction que l'on appellera **fonction de densité**.
Par exemple le poids d'une personne peut prendre un nombre infini de valeurs possibles (sans prendre ne compte le fait que son caractère fini dans la vraie vie est dû à la limite de précision des pèse-personnes).

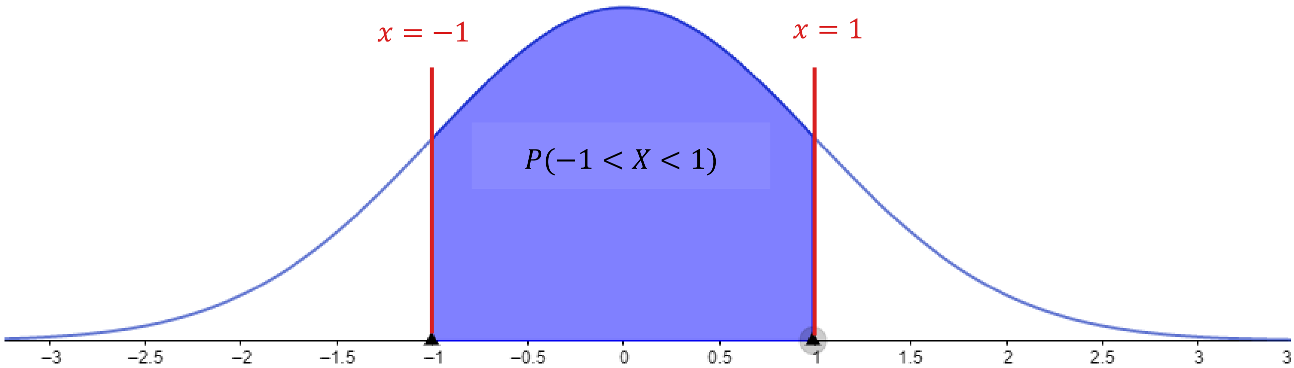
Une **fonction de densité** est définie comme étant toute fonction **continue**, **positive** et définie sur un intervalle I pour laquelle **l'intégrale** $\boldsymbol{\int f(x)dx = 1}$.

Remarque : Dans le cas d'une loi de probabilité continue, il n'est pas possible de calculer la probabilité d'avoir un évènement en particulier car cela correspondrait à un évènement sur une infinité et, de ce fait, la probabilité d'avoir cet évènement précis équivaudrait à un nombre tellement infinitésimal qu'il n'est pas descriptible. En revanche, il est possible de calculer la probabilité que l'évènement soit compris dans un intervalle $[a; b]$.

La **probabilité qu'un évènement soit compris dans l'intervalle** $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$, correspond à l'aire comprise entre la fonction représentative de la loi de densité, l'axe des abscisses ($y = 0$), et les 2 droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$.

Mathématiquement cela correspond à **l'intégrale de la fonction de densité sur l'intervalle** $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$, $\boldsymbol{\int_b^a f(x)dx}$.

Exemple pour l'intervalle $]-1\,;1[$:



2. Loi normale

a. Définition et représentation graphique

La **loi normale**, notée $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ est la loi de probabilité définie sur l'intervalle $]-\infty\,;\,+\infty[$ par la fonction de densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Avec $\boldsymbol{\mu}$ correspondant à l'espérance ou **moyenne** de la loi normale et $\boldsymbol{\sigma}^2$, la **variance** de la loi normale.

La fonction de densité de la loi normale est représentée graphiquement par une **courbe en cloche** ou **courbe de Gauss**.

Cette courbe a plusieurs caractéristiques :

- elle est **symétrique**,
- **centrée sur la moyenne μ**,
- le **resserrement de la courbe dépend de σ** (plus σ est petit, plus la courbe est resserrée sur la moyenne)

Fig. 3. Densités Normales avec mu = 0.

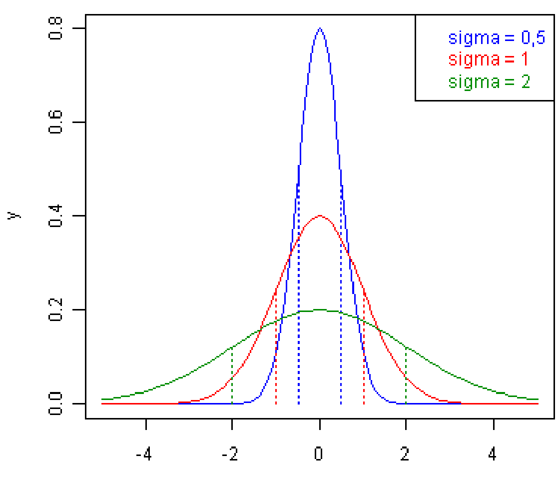
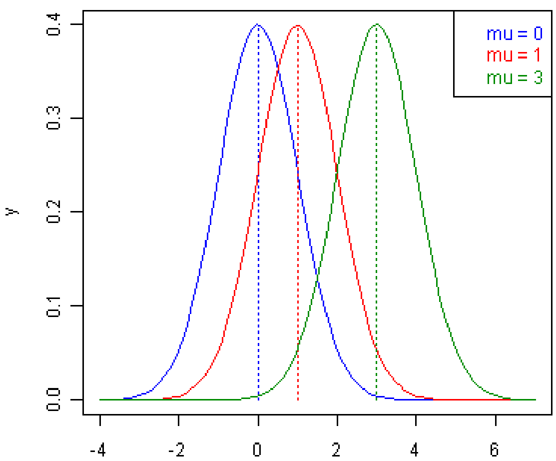


Fig. 2. Densités Normales avec sigma = 1.



Source des graphiques : © nobelis

Remarque : De plus, étant donné que la loi normale est définie par une fonction de densité :

$$\int_{+\infty}^{-\infty} \boldsymbol{f(x)dx = 1}$$

b. Règles des 3 sigmas

Lien vers la vidéo « Loi Normale la Règle des 3 Sigmas - Probabilité » de Mathrix : https://www.youtube.com/watch?v=g2HIAzAmS-0&list=WL&index=51&t=9s

Calculer des probabilités suivant cette loi de densité est quasiment impossible sans utiliser une calculatrice. Cependant il existe quelques valeurs remarquables pour lesquelles les probabilités sont fixes, c'est la règle des 3 sigmas.

La **règle des 3 sigmas** permet de trouver les probabilités associées à des intervalles de $\sigma, 2\sigma$ *et* 3σ autour de la moyenne μ :

- Pour l'intervalle $]\mu - \sigma\ ;\ \mu + \sigma[$, on a :

$$\boldsymbol{P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0,683}$$

- Pour l'intervalle $]\mu - 2\sigma\ ;\ \mu + 2\sigma[$, on a :

$$\boldsymbol{P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0,955}$$

- Pour l'intervalle $]\mu - 3\sigma\ ;\ \mu + 3\sigma[$, on a :

$$\boldsymbol{P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0,997}$$

c. Règles pour le calcul de quelques probabilités

Étant donné que la loi normale est symétrique par rapport à la moyenne et que l'intégrale de la fonction sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ +\infty[$ est égale à 1, on peut dégager quelques propriétés pour le calculs de probabilités :

- $\boldsymbol{P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)}$
- $\boldsymbol{P(a \leq X \leq b) = 1 - (P(X \geq b) + P(X \leq a))}$
- $\boldsymbol{P(X \leq a) = 1 - P(X \geq a)}$
- $\boldsymbol{P(X \leq \mu) = P(X \geq \mu) = 0,5}$

3. Loi normale centrée réduite

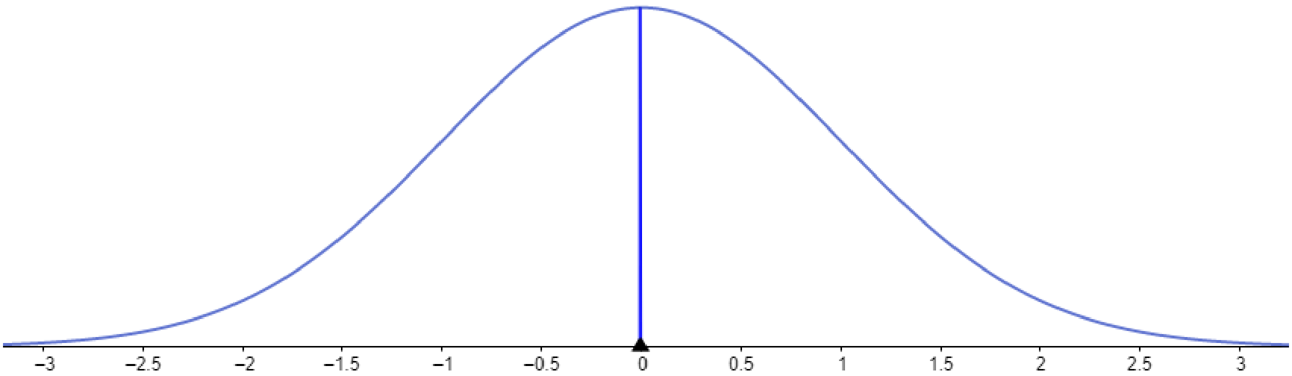
a. Définition et représentation graphique

La **loi normale centrée réduite**, notée $\mathcal{N}(0,1)$ est la loi de probabilité qui est définie sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ +\infty[$ par la fonction de densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{x^2}{2}}$$

Remarque : On peut remarquer que c'est un **cas particulier de la loi normale classique** qui correspondrait à une loi de moyenne $\mu = 0$ et de variance $\sigma^2 = 1$.

La **représentation graphique** de la loi normale centrée réduite est une **courbe de gauss centrée sur 0 et symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.**



Réalisé sur Géogébra

b. Valeurs particulières

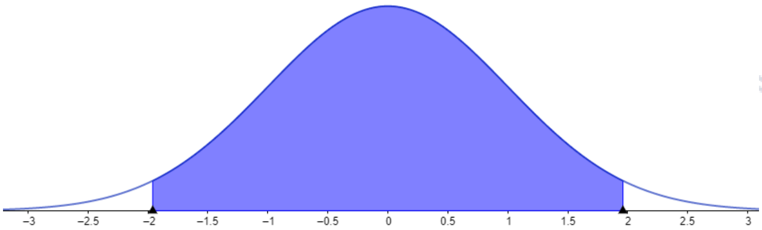
Tout comme pour la loi normale classique, il est compliqué de calculer les probabilités associées à cette loi de densité.

Pour la loi normale, il est possible d'utiliser une table qui donne la valeur de la probabilité pour un intervalle]-Z ; $+Z$[, on appelle cette table, la table de l'écart réduit (cf. III).

On peut cependant retenir 2 valeurs particulières sont souvent utilisées :

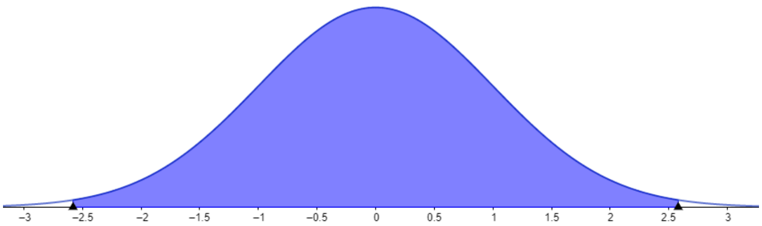
- Z= 1,96 :

$\boldsymbol{P(-1,96 \leq X \leq 1,96) = 0,95}$



- Z= 2,58 :

$\boldsymbol{P(-2,58 \leq X \leq 2,58) = 0,99}$



c. Initiation à l'utilisation de la table de l'écart réduit

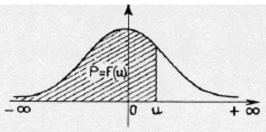
La table de l'écart réduit donne une valeur de Z pour quelques valeurs de probabilités de X compris en dehors de l'intervalle]-Z ; $+Z$[.

La probabilité d'avoir X hors de l'intervalle]-Z ; $+Z$[est alors appelé α et la probabilité d'avoir X dans cette intervalle est (d'après les propriétés de la loi normale centrée réduite) $1 - \alpha$.

Remarque : Pour obtenir α dans le tableau il faut additionner la ligne et la colonne

Par exemple on aura une probabilité $\alpha = 0{,}02$ pour X en dehors de l'intervalle]-2,33 ; 2,33[et une probabilité de $\alpha = 0{,}25$ pour X en dehors de l'intervalle]-1,15 ; 1,15[.

Exemple de table :



u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Table pour les grandes valeurs de u

u	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
F(u)	0,99865	0,99904	0,99931	0,99952	0,99966	0,99976	0,999841	0,999928	0,999968	0,999997

Correction

Exercice 1

On va commencer par calculer l'espérance du nombre de boules blanches tirées :

$$E\,(X) = 66 \times \frac{1}{2} = 33$$

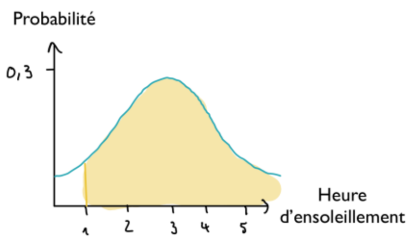
En suivant la loi des grands nombres avec *n*, le nombre de tirage, qui tend vers l'infini, alors la moyenne du nombre de boules blanches tirées à chaque fois est égale à l'espérance et donc à 33.

Exercice 2 :

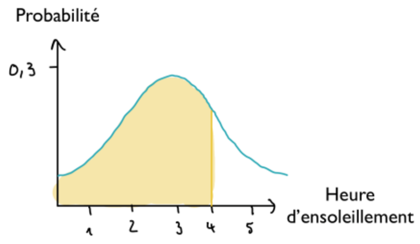
a. $P(X = 3) \;=\; 0.$

Attention la probabilité que X soit égale à une valeur exacte est nulle.

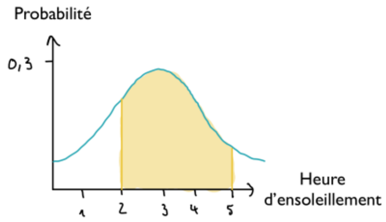
b. $P(X > 1)$



c. $P(X < 4)$


Probabilité
0,3
Heure
d'ensoleillement
1
2
3
4
5

d. $P(2 < X < 5)$


Probabilité
0,3
Heure
d'ensoleillement
1
2
3
4
5

STATISTIQUES A DEUX VARIABLES QUANTITATIVES

Cours et exercices

Objectif de ce chapitre : comprendre l'intérêt des statistiques à deux variables quantitatives

Quelques rappels de définitions :

Variable : éléments pouvant prendre différentes valeurs au sein d'un ensemble, d'une fonction, etc

Quantitative : se dit d'une variable qui prend des valeurs numériques

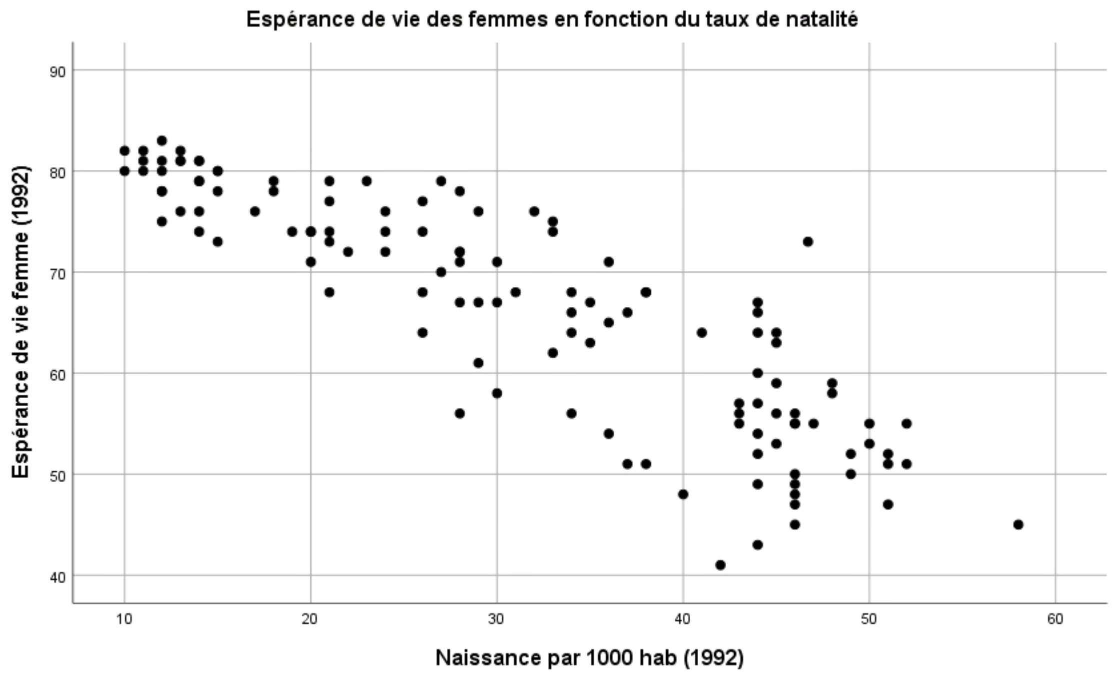
Ces statistiques sont souvent utilisées pour montrer un lien entre deux variables, décrire une tendance.

I. Nuage de points

1. Qu'est-ce qu'un nuage de points ?

Un nuage de points, c'est la représentation de chaque valeur d'une série statistique sur un graphique par un point. L'aspect final de la chose ressemble à un nuage, d'où le terme utilisé.

Exemple imagé :



2. Construire un nuage de points

https://youtu.be/vzNhx4mcsRg

Exercice 1

Créer un nuage de points à partir des données du tableau suivant :

	Étudiant 1	Étudiant 2	Étudiant 3	Étudiant 4	Étudiant 5	Étudiant 6
Note obtenue au bac en maths (/20)	17	10	14	5	16	13
Note obtenue en LSpS en maths (/20)	16	19	8	15	18	6

3. Construire un nuage de point pertinent

https://youtu.be/KBG4Vf0q6KE

Exercice 2

Créer un nuage de points à partir des données du tableau suivant :

	Étudiant 1	Étudiant 2	Étudiant 3	Étudiant 4	Étudiant 5	Étudiant 6
Temps passé à travailler les maths en LSpS (en heures/jour)	1	3	0.5	2	2	0.25
Note obtenue en LSpS en maths (/20)	16	19	8	15	18	6

II. Ajustement affine

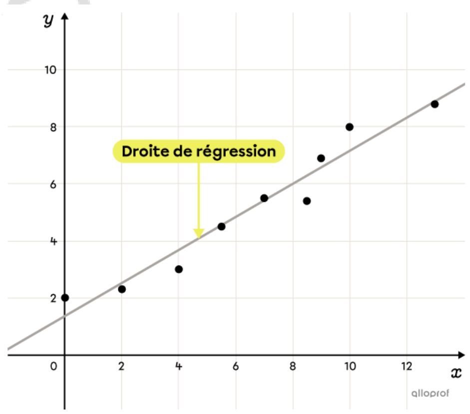
Introduction à la droite d'ajustement : https://youtu.be/ELoz-bwk0So

Le problème du nuage de points, c'est qu'il est difficile d'en tirer une conclusion correcte ; la représentation de toutes les données sur un graphique sous forme de points ne permet pas d'interpréter concrètement le phénomène statistique observé. Pour ce faire, on va avoir recours à la **régression linéaire** pour construire une **droite d'ajustement.**

Qu'est-ce qu'une droite d'ajustement ? Il s'agit d'une droite décrivant une tendance dans la répartition des valeurs statistiques. C'est cette droite qui va nous permettre d'interpréter le phénomène statistique et de potentiellement montrer un lien entre les deux variables.

Cette droite se définit par le fait qu'elle décrive une **fonction affine,** c'est à dire une fonction qui s'écrit sous la forme **y = ax + b.**

Exemple de droite d'ajustement :



Exercice 3

1) A partir des données suivantes, créer **sur un tableur** (type Excel®) un nuage de points, et déterminer l'équation de la droite associée.

Âge (en années)	14	15	16	17	18	19	20
Nombre total de séries regardées	7	10	14	17	21	25	28

2) A partir de cette équation, prédire le nombre de séries regardées par cet individu lorsqu'il aura 30 ans.
3) Tracer au jugé une droite d'ajustement

Lien de la vidéo : https://youtu.be/Wxe5RxjhcWE

Exercice 4

1) Concernant le nuage de points trouvé dans l'exercice 1, existe-t-il une bonne droite d'ajustement ? Si oui, la tracer.
2) Concernant le nuage de points trouvé dans l'exercice 2, existe-t-il une bonne droite d'ajustement ? Si oui, la tracer.
3) Quelle conclusion peut-on en tirer ?

III. Droite des moindres carrés

1. Droite de régression et méthode des moindres carrés

Lien de la vidéo : https://youtu.be/vrKIvAIsqjg

2. Démonstration

Lien vidéo 1 : https://youtu.be/XkeZcW5wqQQ
Lien vidéo 2 : https://youtu.be/uedKHoXiPQQ
Lien vidéo 3 : https://youtu.be/BrrOB6UOy0A
Lien vidéo 4 : https://youtu.be/P1C8bUOdILE

<u>Remarque</u> : La démonstration est un peu longue, mais je te conseille vivement de la regarder car les calculs sont expliqués en détails, et certains sujets abordés te seront utiles en LSpS (notamment les dérivées partielles) !

Exercice 5

On souhaite étudier le lien entre le temps de sommeil en heures/nuit (variable X) et le temps d'activité physique en heures/jour (variable Y).

On sait que $cov(X,Y) = 1{,}92$ et que $\sigma_x = 2{,}09$. De plus, on sait que la droite passe par le point (4 ; 0).

Quelle est la formule de la droite qui lie ces deux variables ? Que peut-on en conclure ?

<u>Remarque</u> : Tu apprendras en cours à calculer une covariance à partir de données !

IV. Corrélation et causalité

1. Corrélation et causalité

ATTENTION !!!!! Ces deux termes ne sont pas synonymes !!!!
Corrélation : exprime un lien entre deux variables
Causalité : indique qu'une variable induit la façon dont se comporte une autre variable

Lien de la vidéo : https://youtu.be/5SyWBL6JurU

Exercice 6

Un étudiant en LSpS dort 10 heures par nuit, il est donc en pleine forme. De ce fait, il travaille efficacement, et a le temps de faire du sport tous les soirs. Quelles sont les propositions vraies ?

A. Le sommeil est la cause d'un travail efficace.
B. Le temps de faire du sport est la cause d'un travail efficace.
C. Le temps de faire du sport est la conséquence d'un travail efficace.
D. Le temps de faire du sport, le travail et le sommeil sont corrélés

4) Nuage de points et corrélation linéaire

Lien de la fiche : https://fr.khanacademy.org/math/terminale-option-math-complementaires/xd9273d115c91e8d4:statistique-a-deux-variables-quantitatives/xd9273d115c91e8d4:correlation-et-causalite/a/constructing-and-interpreting-a-scatterplot

5) Résumé : Nuage de points et corrélation

Lien de la fiche : https://fr.khanacademy.org/math/terminale-option-math-complementaires/xd9273d115c91e8d4:statistique-a-deux-variables-quantitatives/xd9273d115c91e8d4:correlation-et-causalite/a/scatterplots-and-correlation-review

6) Résumé : Coefficient de corrélation

Lien de la fiche : https://fr.khanacademy.org/math/terminale-option-math-complementaires/xd9273d115c91e8d4:statistique-a-deux-variables-quantitatives/xd9273d115c91e8d4:correlation-et-causalite/a/correlation-coefficient-review

V. Ajustement non affine – Application des ajustements

1. La droite d'ajustement : Exemple des téléphones portables

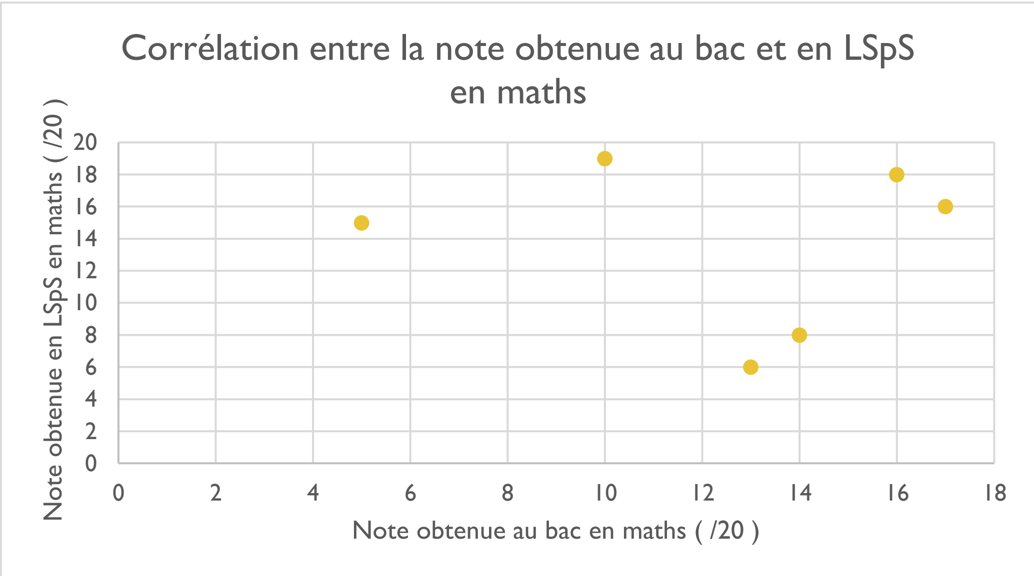
Lien de la fiche : https://fr.khanacademy.org/math/terminale-option-math-complementaires/xd9273d115c91e8d4:statistique-a-deux-variables-quantitatives/xd9273d115c91e8d4:ajustement-non-affine-application-des-ajustements/a/equations-of-trend-lines-phone-data

2. Résumé : La régression linéaire

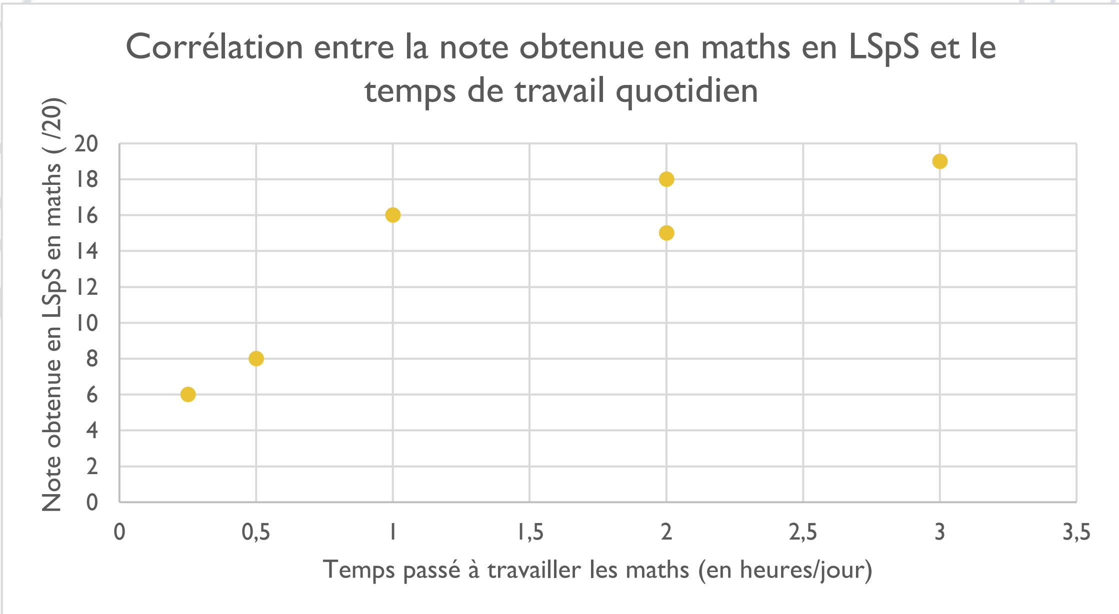
Lien de la fiche : https://fr.khanacademy.org/math/terminale-option-math-complementaires/xd9273d115c91e8d4:statistique-a-deux-variables-quantitatives/xd9273d115c91e8d4:ajustement-non-affine-application-des-ajustements/a/linear-regression-review?modal=1

Correction

Exercice 1



Exercice 2

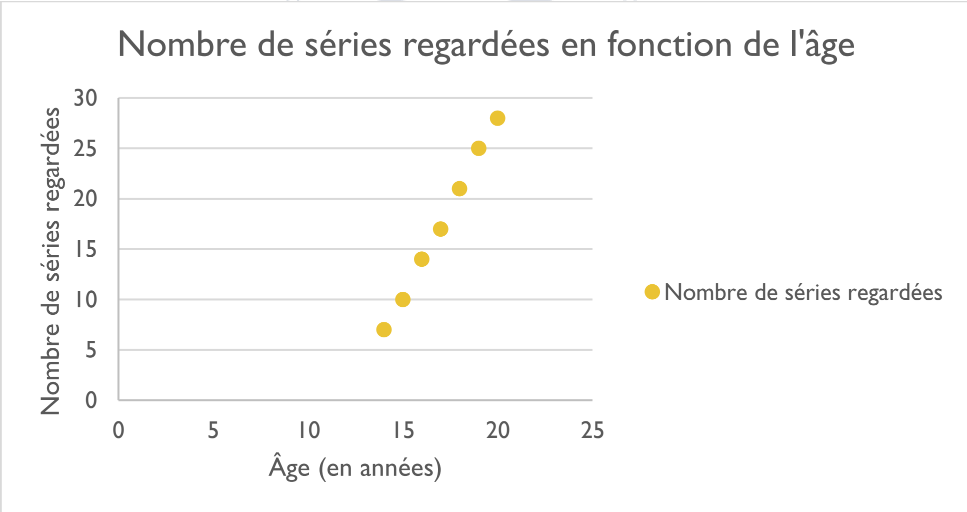


Exercice 3

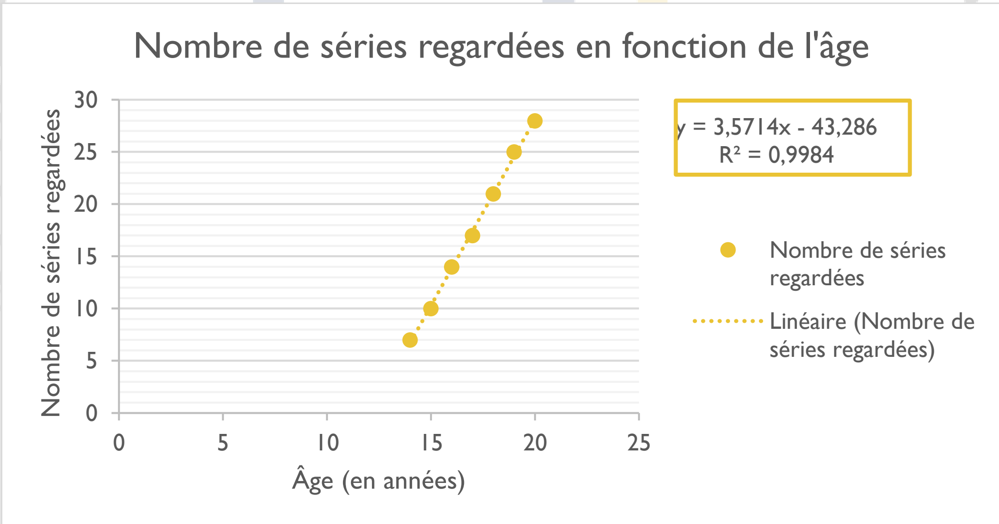
1) Je rentre d'abord les données dans un tableau :

	A	B	C
1			
2	Âge	Nombre de séries regardées	
3	14	7	
4	15	10	
5	16	14	
6	17	17	
7	18	21	
8	19	25	
9	20	28	
10			

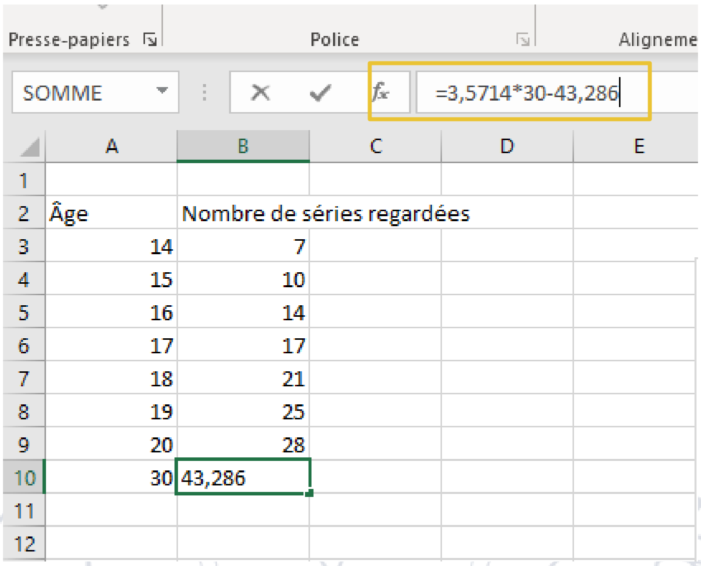
Ensuite je créé un nuage de points (Dans Insertion → Graphiques → Nuages de points)



Enfin j'affiche l'équation de la droite (Dans Disposition rapide -> Dispositif 9)



2) Pour répondre à cette question, il faut remplacer x par 30 dans l'équation trouvée à la question 1 :


Presse-papiers | Police | Aligneme

SOMME | f_x | =3,5714*30-43,286

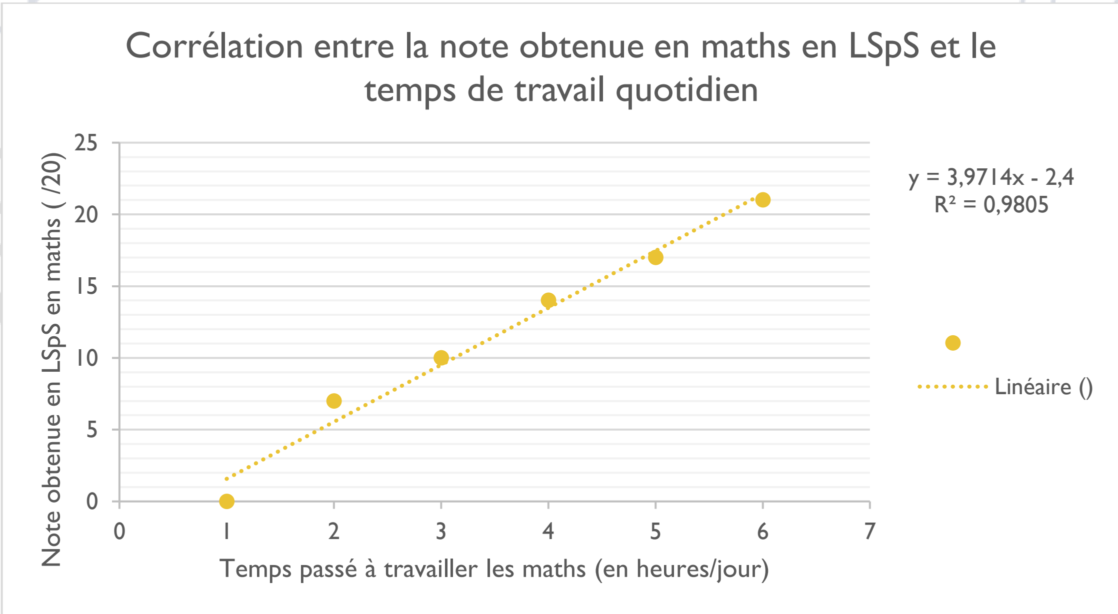
	A	B	C	D	E
1					
2	Âge	Nombre de séries regardées			
3	14	7			
4	15	10			
5	16	14			
6	17	17			
7	18	21			
8	19	25			
9	20	28			
10	30	43,286			
11					
12					

On peut donc prédire qu'à 30 ans, cet individu aura regardé **43,286 séries**.

Exercice 4

1) Non, pour ce graphique il n'y a pas de droite d'ajustement possible, les points semblent dispersés aléatoirement.

2) Oui, on peut tracer une droite d'ajustement qui est la suivante :



3) On peut en conclure que la note obtenue en LSpS augmente linéairement avec le travail quotidien en maths, mais n'est pas liée à la note au bac.

Exercice 5

On cherche une équation du type $y = mx + b$. On va donc calculer m puis b, à partir des formules trouvées en fin de démonstration.

1) On calcule m :

$$m = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_x^2} = \frac{1{,}92}{2{,}09^2} = 0{,}44$$

2) On calcule b :

$$b = y - mx$$

On sait que la droite passe par le point (4 ; 0), on peut donc remplacer x par 4 et y par 0.

$$b = 0 - 0{,}44 \times 4 = -1{,}76$$

L'équation de la droite est donc $\boldsymbol{y = 0,44x - 1,76}$. On en conclut que le temps de sommeil par nuit augmente linéairement avec le temps de sport quotidien.

Exercice 6

Si on résume le texte, on peut faire le schéma suivant :

Dormir 10 heures → Travail efficace → Temps pour le sport

A gauche des flèches se trouvent les causes, et à droite les conséquences

A. **VRAI**
B. **FAUX** : Comme montré sur le schéma, le sport est la conséquence du travail efficace
C. **VRAI**
D. **VRAI** : Ces trois variables sont liées les unes aux autres, on peut donc dire qu'elles sont corrélées

Nous avons besoin de ton avis

Trop compliqué ou au contraire trop facile ? Un chapitre t'a semblé peu compréhensible ? Tu penses avoir remarqué des erreurs ? N'hésite pas à nous faire un retour sur ce que tu as pensé du contenu de ce cahier.

Tes remarques nous permettrons d'adapter et de perfectionner cette remise à niveau au fur et à mesure des années.
Nous te remercions pour ton retour et nous espérons que ce cahier t'aura été utile.

L'équipe du tutorat,